Mathematik für die Fachhochschulreife
Gesamtausgabe

Bearbeitet von Mathematiklehrern und Ingenieuren an beruflichen Schulen
(Siehe nächste Seite)

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsseldorfer Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 85269 mit Beilage GTR
Europa-Nr.: 85085 ohne Beilage GTR

Autoren des Buches „Mathematik für die Fachhochschulreife Gesamtausgabe“

Josef Dillinger	München
Bernhard Grimm	Sindelfingen, Leonberg
Frank-Michael Gumpert	Stuttgart
Gerhard Mack	Stuttgart
Thomas Müller	Ulm
Bernd Schiemann	Durbach

Lektorat: Bernd Schiemann

Bildentwürfe: Die Autoren

Bildbearbeitung: Zeichenbüro des Verlags Europa-Lehrmittel GmbH & Co. KG, Ostfildern

1. Auflage 2014
Druck 5 4 3 2 1

Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Behebung von Druckfehlern untereinander unverändert sind.

ISBN: 978-3-8085-8526-9 mit Beilage GTR
ISBN: 978-3-8085-8508-5 ohne Beilage GTR

Umschlaggestaltung: Idee Bernd Schiemann, Ulm; Ausführung: Andreas Sonnhüter, 40625 Düsseldorf

Satz: TextDesign GreenOrange, 73252 Lenningen, www.textdesign-go.de

Druck: M. P. Media-Print Informationstechnologie GmbH, 33100 Paderborn

Vorwort zur 1. Auflage

Das vorliegende Buch für den Mathematikunterricht in Berufskollegs, Fachoberschulen, und Berufsfachschulen baut auf dem bewährten Konzept der Fachreihe Mathematik für die Fachhochschulreife des Verlags Europa-Lehrmittel auf.

Entsprechend den Vorgaben der Bildungspläne wird großer Wert auf die Selbstorganisation des Lernprozesses, d. h. auf immer größer werdende Eigenständigkeit und Eigenverantwortung der Schülerinnen und Schüler im Erwerb von Wissen und Können gelegt. Aus diesem Grund sind mathematische Zusammenhänge möglichst verständlich und schülernah formuliert. Die mathematischen Inhalte sind auf die besonderen Anforderungen der Bildungsgänge, die zur Fachhochschulreife führen, abgestimmt und werden schülergerecht vorwiegend anwendungsbezogen an praktischen Beispielen eingeführt und behandelt.

Zur Förderung des Interesses an der Mathematik sowie handlungsorientierter Themenbearbeitung enthält das Buch eine große Anzahl von Beispielen mit graphischen Darstellungen, anhand derer eine Vielzahl von Aufgaben zu lösen sind. Dabei sind die Aufgaben für selbstorganisiertes Lernen in Partner- oder Gruppenarbeit ausgelegt und deren Ergebnisse sind auf der selben Buchseite angegeben, um eine eigenständige Lernerfolgskontrolle zu ermöglichen.

Ein didaktisch aufbereiteter Lösungsband mit ausführlichen Schritten zur Lösung sowie die Formelsammlung „Formeln zu Mathematik für die Fachhochschulreife" ergänzen das Buch. Das Buch enthält in einer Variante eine Einführung in den grafikfähigen Taschenrechner (GTR).

Zum Ausgleich unterschiedlicher Vorkenntnisse, aber auch zum intensiven Wiederholen, beginnt das Buch mit den Kapiteln Algebraische und Geometrische Grundlagen.

Die Hauptabschnitte des Buches sind

- **Algebraische Grundlagen**
- **Geometrische Grundlagen**
- **Analysis**
- **Differenzialrechnung**
- **Integralrechnung**
- **Komplexe Rechnung**
- **Vektorrechnung**
- **Stochastik**
- **Matrizen**
- **Prüfungsaufgaben**
  - **Musteraufgaben**
  - **Testen Sie Ihr Wissen zur Prüfung!**
- **Anwendungsbezogene Aufgaben**

Über Vorschläge, die zu einer Verbesserung des Buches führen, freuen sich Verlag und Autoren.

Frühjahr 2014 Die Verfasser

Mathematik für die Fachhochschulreife im Überblick

Inhaltsverzeichnis

4 Differenzialrechnung

5 Integralrechnung

6 Komplexe Rechnung

7 Vektorrechnung

8 Stochastik

Zitate berühmter Wissenschaftler

„Er ist ein Mathematiker und also hartnäckig.“
Johann Wolfgang von Goethe (1748 bis 1832)

„Die erste Regel, an die man sich in der Mathematik halten muss, ist exakt zu sein. Die zweite Regel ist, klar und deutlich zu sein und nach Möglichkeit einfach.“
Lazare Nicolas Carnot (1753 bis 1823)

Es gibt Dinge, die den Menschen unglaublich erscheinen, die nicht Mathematik studiert haben.“
Archimedes (287 v. Chr. bis 212 v. Chr.)

„Manche Menschen haben einen Gesichtskreis vom Radius Null und nennen ihn ihren Standpunkt.“
David Hilbert (1862 bis 1943)

„In der Mathematik gibt es keine Autoritäten. Das einzige Argument für die Wahrheit ist der Beweis.“
Kasimir Urbanik, 1975

„Das Buch der Natur ist mit mathematischen Symbolen geschrieben. Genauer: Die Natur spricht die Sprache der Mathematik: die Buchstaben dieser Sprache sind Dreiecke, Kreise und andere mathematische Funktionen.“
Galileo Galilei (1564 bis 1642)

„Ich kann die Bewegung der Himmelskörper berechnen, aber nicht das Verhalten der Menschen.“
Sir Isaac Newton (1643 bis 1727)

„Wer die erhabene Weisheit der Mathematik tadelt, nährt sich von Verwirrung.“
Leonardo da Vinci (1452 bis 1519)

„Mathematik ist die einzige perfekte Methode, sich selbst an der Nase herumzuführen.“
Albert Einstein (1879 bis 1955)

„Die Mathematik muss man schon deswegen studieren, weil sie die Gedanken ordnet.“
Michail W. Lomonossow (1711 bis 1765)

„Die Furcht vor der Mathematik steht der Angst erheblich näher als der Ehrfurcht.“
Felix Auerbach (1856 bis 1933)

„Man darf nicht das, was uns unwahrscheinlich und unnatürlich erscheint, mit dem verwechseln, was absolut unmöglich ist.“
Carl Friedrich Gauß (1777 bis 1855)

„Es ist unglaublich, wie unwissend die studirende Jugend auf Universitäten kommt, wenn ich 10 Minuten rechne oder geometrisire, so schläft ¼ derselben sanfft ein.“
Michail W. Lomonossow (1711 bis 1765)

„Im großen Garten der Geometrie kann sich jeder nach seinem Geschmack einen Strauß pflücken.“
David Hilbert (1862 bis 1943)

„Du wolltest doch Algebra, da hast du den Salat.“
Jules Verne (1828 bis 1905)

„Beweisen muß ich diesen Käs, sonst ist die Arbeit unseriös.“
Friedrich Wille (1935 bis 1992)

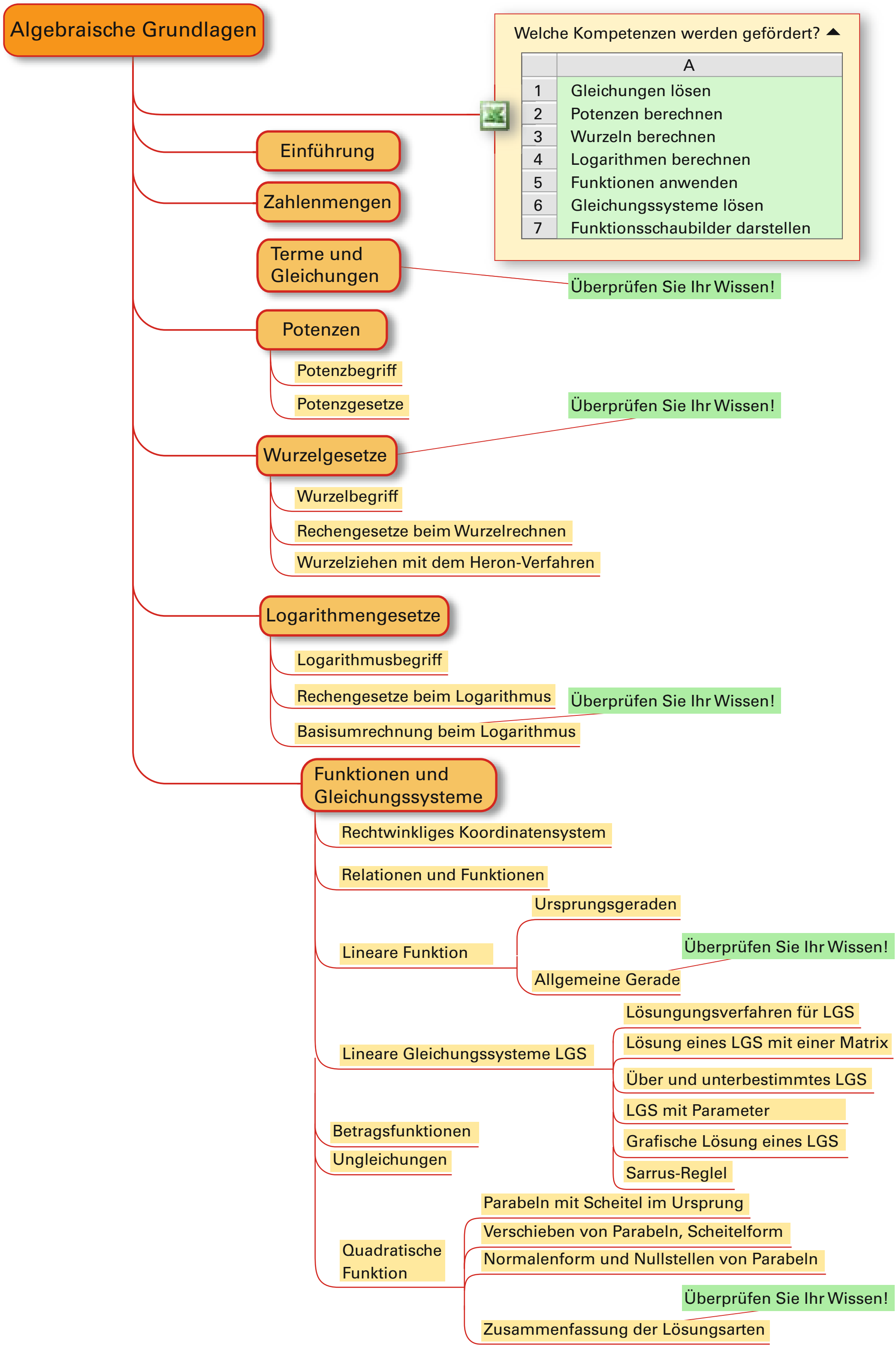
„Wer sich keinen Punkt denken kann, der ist einfach zu faul dazu.“
Willhelm Busch (1832 bis 1908)

„Do not worry about your difficulties in mathematics, I assure you that mine are greater.“
Albert Einstein (1879 bis 1955)

„Mit Mathematikern ist kein heiteres Verhältnis zu gewinnen.“
Johann Wolfgang von Goethe (1748 bis 1832)

„If A equals success, then the formula is A equals X plus Y plus Z. X is work, Y is play. Z is keep your mouth shut.“
Albert Einstein (1879 bis 1955)

Die Zitattexte sind in Originalschreibweise wiedergegeben.


Algebraische Grundlagen
Welche Kompetenzen werden gefördert?
A
1 Gleichungen lösen
2 Potenzen berechnen
3 Wurzeln berechnen
4 Logarithmen berechnen
5 Funktionen anwenden
6 Gleichungssysteme lösen
7 Funktionsschaubilder darstellen
Einführung
Zahlenmengen
Terme und Gleichungen
Überprüfen Sie Ihr Wissen!
Potenzen
Potenzbegriff
Potenzgesetze
Überprüfen Sie Ihr Wissen!
Wurzelgesetze
Wurzelbegriff
Rechengesetze beim Wurzelrechnen
Wurzelziehen mit dem Heron-Verfahren
Logarithmengesetze
Logarithmusbegriff
Rechengesetze beim Logarithmus
Überprüfen Sie Ihr Wissen!
Basisumrechnung beim Logarithmus
Funktionen und Gleichungssysteme
Rechtwinkliges Koordinatensystem
Relationen und Funktionen
Ursprungsgeraden
Lineare Funktion
Überprüfen Sie Ihr Wissen!
Allgemeine Gerade
Lösungungsverfahren für LGS
Lösung eines LGS mit einer Matrix
Lineare Gleichungssysteme LGS
Über und unterbestimmtes LGS
LGS mit Parameter
Betragsfunktionen
Grafische Lösung eines LGS
Ungleichungen
Sarrus-Reglel
Parabeln mit Scheitel im Ursprung
Verschieben von Parabeln, Scheitelform
Quadratische Funktion
Normalenform und Nullstellen von Parabeln
Überprüfen Sie Ihr Wissen!
Zusammenfassung der Lösungsarten

1 Algebraische Grundlagen

1.1 Einführung

Entwicklung der Zahlen

Zahlen sind die Basis, ohne die unsere Rechenoperationen wenig Sinn hätten. Damit die Menschen rechnen konnten, mussten erst geeignete Zahlendarstellungen und Zahlensysteme gefunden werden.

1. Finger und Zehen

Finger und Hände hatten einen entscheidenden Einfluss auf die ersten Zahlensysteme.

Mit den 5 Fingern einer Hand, den 10 Fingern beider Hände oder den insgesamt 20 Fingern und Zehen bediente man sich einer natürlichen Gliederung.

Eine 5er-Stufung findet man bei den Griechen, Mayas und Chinesen.

Das 10er-System hatten die Ägypter, Sumerer und Babylonier.

Die Mayas und die Inder benutzten auch eine 20er-Stufung in ihrem Zahlensystem. Die Auswirkungen dieses Systems findet man im englischen Pfund Sterling mit seinen 20 Schillingen sowie in ähnlicher Form im Französischen und Dänischen.

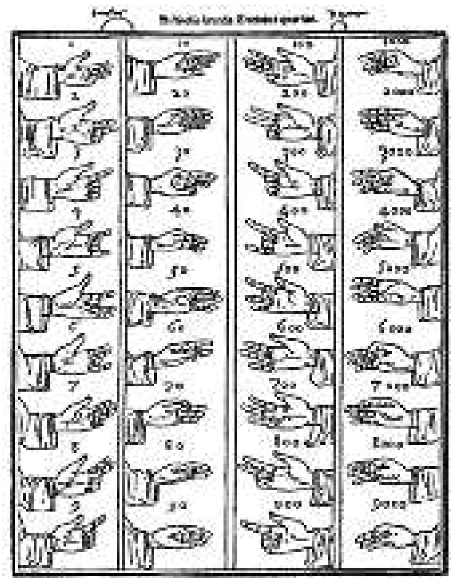


Bild 1: Fingerrechnen, wie es in alten Rechenbüchern vorkam

2. Astronomie

Eine Ausnahme der seitherigen Stufung stellt die 60er-Stufung dar, die bei den Sumerern und Babyloniern vorgefunden wurde. Vermutlich hat sie ihren Ursprung in der gut entwickelten Astronomie der Mesopotamier, die das Jahr in 360 Tage eingeteilt hatten.

Daraus resultiert bis heute die Kreiseinteilung in 6 mal 60° = 360° sowie die Einteilung der Stunden in 60 Minuten und der Minuten in 60 Sekunden.

Bild 2: Babylonische Keilschrift hat die 60 als Basis (Sexagesimalsystem)

3. Römische Zahlen

Auf das unzweckmäßige römische Zahlensystem wird hier nicht weiter eingegangen, da es zur Multiplikation und Potenzierung und damit für das Rechnen mit großen Zahlen völlig ungeeignet ist.

4. Indisch-arabische Zahlen

Die von uns heute verwendeten so genannten „arabischen" Zahlen kommen ursprünglich aus Indien. Sie sind im Laufe der Jahrhunderte über Vorderasien und aus dem unter arabischem Einfluss stehenden Spanien zu uns gelangt.

Kennzeichnend für unser heutiges Zehnersystem ist die Verwendung von zehn verschiedenen Ziffern innerhalb eines Stellenwerts. Mit diesem Dezimalsystem ist ein einfaches und schnelles Rechnen möglich. In Deutschland wurde dieses System vor allem durch Adam Ries(e) bekannt.

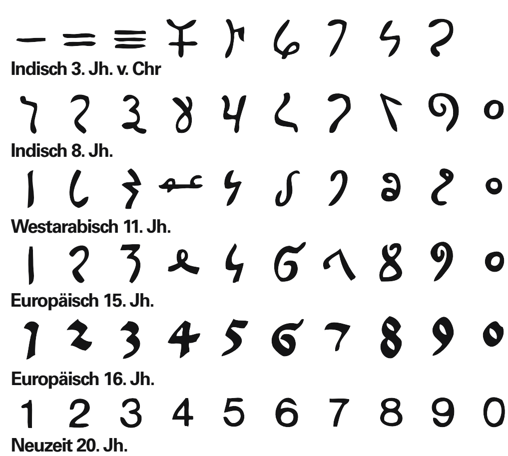


Bild 3: Entwicklung der Dezimalzahlen bis heute

1.2 Zahlen

Zahlenmengen

In der Mengenlehre werden die Zahlen als Elemente von Zahlenmengen festgelegt.

Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$

Die Menge der natürlichen Zahlen beinhaltet alle Zahlen, die zum Abzählen benötigt werden. Sie enthält alle positiven ganzen Zahlen einschließlich der Null **(Tabelle 1).**

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \ldots\}$$

Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

Die Menge der ganzen Zahlen enthält die natürlichen Zahlen und alle negativen ganzen Zahlen. Damit ist die Rechenoperation Subtraktion uneingeschränkt möglich. Die Menge der ganzen Zahlen ohne Null ist $\mathbb{Z}^*$.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; \ldots\}$$

Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

Die Erweiterung der ganzen Zahlen um die Bruchzahlen machen die Rechenoperation Division (außer mit Null) möglich.

$$\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{p}{q} \wedge p \in \mathbb{Z}; q \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Zusätzlich zu den rationalen Zahlen existieren am Zahlenstrahl Punkte, die nicht durch einen Bruch darstellbar sind **(Bild 1)**. Diese Zahlen nennt man irrationale Zahlen.

Beispiele für irrationale Zahlen sind: π; e; $\sqrt{2}$; lg 2; ...

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ ist rational} \vee x \text{ ist irrational}\}$$

Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

Gleichungen der Form $x^2 + 1 = 0$ sind mit reellen Zahlen nicht lösbar. Aus diesem Grund hat man die Zahlenmenge $\mathbb{R}$ um die imaginären Zahlen erweitert.

Beispiele für imaginäre Zahlen sind –i; 2i; ...2i bedeutet zweimal die imaginäre Zahl.

$$\mathbb{C} = \{\underline{z} \mid \underline{z} = a + i \cdot b;\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

Komplexe Zahlen bestehen aus dem Realteil a und dem imaginären Anteil b.

Komplexe Zahlen können wegen der imaginären Anteile nicht mehr am Zahlenstrahl dargestellt werden, sondern werden in der komplexen Zahlenebene dargestellt.

Tabelle 1: Zusammenfassung der Zahlenmengen

Zahlenmenge	Symbol	Zahlenart	Beispiele
Natürliche Zahlen	$\mathbb{N}$	Positive ganze Zahlen	0; 1; 2; ...
Ganze Zahlen	$\mathbb{Z}$	Negative und positive ganze Zahlen	...; –2; –1; 0; 1;...
Rationale Zahlen	$\mathbb{Q}$	Ganze Zahlen und Bruchzahlen	...; $-\frac{1}{2}$; 2; $\frac{2}{3}$; $\frac{7}{8}$; 6; ...
Reelle Zahlen	$\mathbb{R}$	Rationale und irrationale Zahlen	...; –1; $\sqrt{2}$; $\frac{5}{3}$; π; 7; ...
Komplexe Zahlen	$\mathbb{C}$	Reelle und imaginäre Zahlen	–2i; 2 + i; –1 + 2i

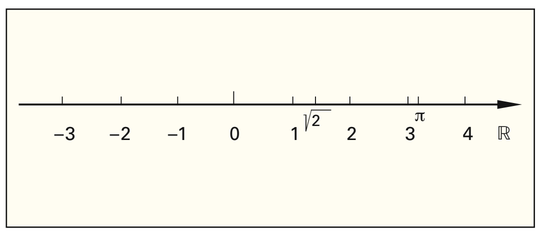


Bild 1: Zahlenstrahl

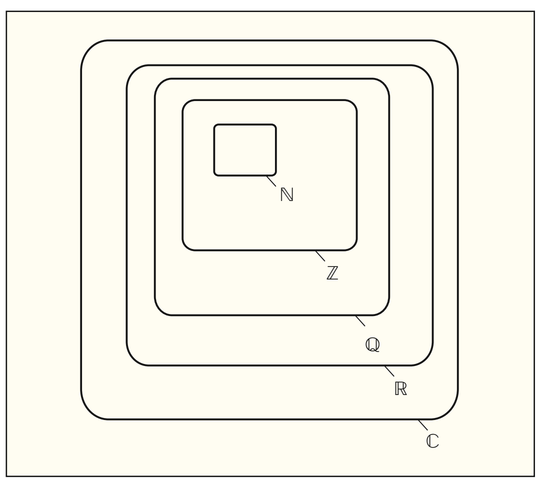


Bild 2: Zahlenmengen im Venndiagramm

1.3 Terme und Gleichungen

Terme können Zahlen, z. B. -1; $\frac{1}{2}$; 2 oder Variablen, z. B. a; x; y sein. Werden Terme durch Rechenoperationen verbunden, so entsteht wieder ein Term.

Eine Gleichung besteht aus einem Linksterm T_l und aus einem Rechtsterm T_r.

Werden zwei Terme durch das Gleichheitszeichen miteinander verbunden, so entsteht die Gleichung $T_l = T_r$.

Beispiel 1: Gleichung

Stellen Sie die beiden Terme T_l: $x + 2$ und T_r: -4 als Gleichung dar.

Lösung: $\mathbf{x + 2 = -4}$

Werden an Gleichungen Rechenoperationen durchgeführt, so muss auf jeder Seite der Gleichung diese Rechenoperation durchgeführt werden **(Tabelle 1)**. Eine Gleichung mit mindestens einer Variablen stellt eine Aussageform dar. Diese Aussageform kann eine wahre oder falsche Aussage ergeben, wenn den Variablen Werte zugeordnet werden.

Ein Wert x einer Gleichung heißt Lösung, wenn beim Einsetzen von x in die Gleichung eine wahre Aussage entsteht.

Beispiel 2: Lösung einer Gleichung

Ermitteln Sie die Lösung der Gleichung $x + 2 = -4$

Lösung:

$$x + 2 = -4 \quad |-2$$
$$x + 2 - 2 = -4 - 2$$
$$\mathbf{x = -6}$$

1.4 Definitionsmenge

Die Definitionsmenge eines Terms kann einzelne Werte oder ganze Bereiche aus der Grundmenge ausschließen **(Tabelle 2)**.

Beispiel 3: Definitionsmenge

Die Definitionsmenge der Gleichung $\sqrt{x-1} = \frac{2}{(x+1)(x-1)}$; $x \in \mathbb{R}$ ist zu bestimmen.

Lösung:

Die Definitionsmenge D_1 des Linksterms wird durch die Wurzel eingeschränkt. $D_1 = \{x|x \geq 1 \wedge x \in \mathbb{R}\}$

Die Definitionsmenge D_2 des Rechtsterms wird durch den Nenner eingeschränkt. $D_2 = \mathbb{R}\backslash\{-1; 1\}$

Für die Gesamtdefinitionsmenge D gilt:

$\mathbf{D = D_1 \cap D_2 = \{x|x > 1 \wedge x \in \mathbb{R}\}}$

Tabelle 1: Rechenoperationen bei Gleichungen $T_l = T_r$

Operation	Allgemein	Beispiel
Addition	$T_l + T = T_r + T$	$x - a = 0 \quad \vert +a$ $x - a + a = 0 + a$ $x = a$
Subtraktion	$T_l - T = T_r - T$	$x + a = 0 \quad \vert -a$ $x + a - a = 0 - a$ $x = -a$
Multiplikation	$T_l \cdot T = T_r \cdot T$	$\frac{1}{2} \cdot x = 1 \quad \vert \cdot 2$ $\frac{1}{2} \cdot x \cdot 2 = 1 \cdot 2$ $x = 2$
Division	$\frac{T_l}{T} = \frac{T_r}{T}$; $T \neq 0$	$2 \cdot x = 4 \quad \vert :2$ $\frac{2 \cdot x}{2} = \frac{4}{2}$ $x = 2$

Tabelle 2: Einschränkung des Definitionsbereichs in $\mathbb{R}$

Term	Einschränkung	Beispiel
Bruchterm $T_B = \frac{Z(x)}{N(x)}$	$N(x) \neq 0$	$T(x) = \frac{x+1}{x-1}$ $x - 1 \neq 0$ $x \neq 1$ $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$
Wurzelterm $T_W = \sqrt{x}$	$x \geq 0$ x größer gleich 0	$T(x) = \sqrt{x-1}$ $x - 1 \geq 0$ $x \geq 1$ $D = \{x\vert x \geq 1 \wedge x \in \mathbb{R}\}$
Logarithmusterm $T_l = \log_a x$	$x > 0$ x größer 0	$T(x) = \log_{10} x$ $x > 0$ $D = \{x\vert x > 0 \wedge x \in \mathbb{R}\}$

Bei Aufgaben aus der Technik oder Wirtschaft ergeben sich häufig einschränkende Bedingungen in technischer, technologischer oder ökonomischer Hinsicht. So kann die Zeit nicht negativ sein oder die Temperatur nicht kleiner 273 °C werden. Diese eingeengte Definitionsmenge ist dann die eigentliche Definitionsmenge einer Gleichung.

Überprüfen Sie Ihr Wissen!

Beispielaufgaben

Zahlen

1. Geben Sie die Mengenbeziehungen der Zahlenmengen an **(Bild 1)**.

2. Welche Aussagen sind wahr?

a) $-2 \in \mathbb{N}$ **b)** $\pi \in \mathbb{R}$

c) $-2{,}5 \in \mathbb{Z}$ **d)** $2 \in \mathbb{Q}$

Terme und Gleichungen; Definitionsmenge

1. Lösungsmenge
Bestimmen Sie die Lösung für $x \in \mathbb{R}$.

a) $4(2x - 6) = 2x - (x + 4)$

b) $(2x - 1)(3x - 2) = 6(x + 2)(x - 4)$

c) $\frac{x+2}{5} - 2 = 4$

d) $\frac{2-x}{2} + a = 1$

2. Lösen von Gleichungen
Lösen Sie die Gleichungen nach allen Variablen auf.

a) $h = \frac{1}{2} g \cdot t^2$

b) $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

3. Definitions- und Lösungsmenge
Geben Sie die Definitionsmenge und die Lösungsmenge an.

a) $\sqrt{2x+2} = \sqrt{4x-8}$ **b)** $\frac{3x-1}{x+2} = \frac{2-3x}{2-x}$

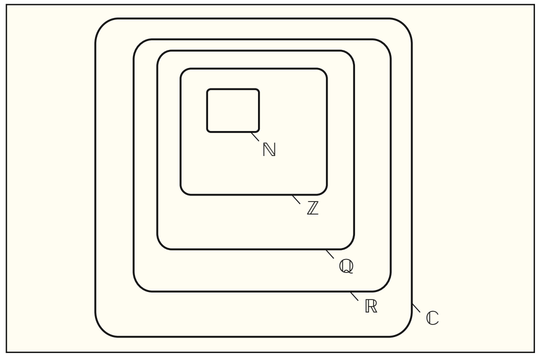


Bild 1: Zahlenmengen im Venndiagramm

Lösungen Beispielaufgaben

Zahlen

1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

2. b) und **d)** sind wahr

Terme und Gleichungen; Definitionsmenge

1. a) $x = \frac{20}{7}$

b) $x = -10$

c) $x = 28$

d) $x = 2a$

2. a) $g = \frac{2h}{t^2}$; $t = \pm\sqrt{\frac{2h}{g}}$

b) $R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$; $R_1 = \frac{R \cdot R_2}{R_2 - R}$; $R_2 = \frac{R \cdot R_1}{R_1 - R}$

3. a) $D = \{x|x \geq 2\}_{\mathbb{R}}$; $L = \{5\}$

b) $D = \mathbb{R}\backslash\{-2; 2\}$; $L = \left\{\frac{6}{11}\right\}$

Übungsaufgaben

Berechnen und Lösen von Termen

1. Berechnen Sie den Wert des Terms:

a) $312 + (-28 + 19)$

b) $312 - (-28 + 19)$

c) $312 + [12 - (+28 - 19) + 28] - (-18 + 24)$

d) $18 - \{16 - [23 - (-12 - 7 + 28) + 32] - 62\}$

2. Fassen Sie die Terme durch Auflösen der Klammern zusammen und setzen Sie die angegebenen Werte ein.

a) $14x - (28x + 19y)$ Setzen Sie $x = -2$ und $y = 3$

b) $3a + [12\,b - (+28a - 19b)] - (-18a + 24b)$
Setzen Sie $a = 2$ und $b = -3$

c) $14\,r + (14s - 12r) - (8r + 12s) + 12s - (8r - 9s)$
Setzen Sie $r = 6$ und $s = 4$

d) $60 - \{16x - [23y - (-12x - 7y + 28) + 32x] - 62y\}$
Setzen Sie $x = -2$ und $y = 3$

Lösungen Übungsaufgaben

1. a) 303

b) 321

c) 337

d) 110

2. a) $42x - 19y = -29$

b) $-7a + 7b = -35$

c) $-14r + 23s = 8$

d) $28x + 92y + 32 = 252$

e) $18 + \{-16y + [23x - (12y - 7x + 28) + 32y] - 62\}$
Setzen Sie $x = -2$ und $y = 3$

f) $4r + 3(14s - 12r) - 2(8r + 12s) - 6(8r - 9s)$
Setzen Sie $r = -6$ und $s = 4$

g) $60x - 2\{16x - 3[23y - 4(-12x - 7y + 28)] - 62y\}$
Setzen Sie $x = 2$ und $y = -3$

h) $\frac{3}{4}x + \frac{5}{6}y - 2\left(\frac{5}{6}x - \frac{1}{4}y\right) + \frac{2}{3}(4x - 3y) - 2x - 3y$
Setzen Sie $x = -2$ und $y = 3$

i) $\frac{3}{2}x + \frac{5}{4}y - 3\left(\frac{5}{6}x - \frac{1}{12}y\right) + \frac{2}{3}(4x - 3y) + 2x + 3y$
Setzen Sie $x = 2$ und $y = -3$

3. Multiplizieren Sie aus und fassen Sie zusammen.

a) $3x \cdot 2y \cdot z + 2x \cdot 5y \cdot (-2z) + 4x \cdot (-2y) \cdot (-5z)$

b) $-3x \cdot 2y \cdot (-z) - 2x \cdot 5y \cdot (-2z) + 4x \cdot (-3y) \cdot (-4z)$

c) $2(a - b) + 3(2a + 3b) - 3(a - 4b) + (a - 2b)5$

d) $(4 - x)(y + 2) + 2(3 + x)(2 - y) - (x + 2)(y - 2)$

e) $2(4 - x)(2y + 2) + (3 + 2x)(2 - y) - (x - 2)(y - 2)$

4. Bestimmen Sie aus den Gleichungen die Lösungsmenge L = {x}.

a) $\frac{x + 3}{5} - 4 = 2$

b) $5x = 2(x - 7) - 4$

c) $27 + (3 - x) = 5x - 4$

d) $2(x + 3) = 4x - [2 - (3x - 2)]$

e) $2x - [6 - (2x + 3)] = 5 - 5x$

f) $9x + 1 - [2(5 - 3x + (x - 1))] = 6x - 13$

Definitions- und Lösungsmenge

5. Geben Sie die Definitionsmenge folgender Terme an.

a) $\sqrt{2x + 100}$

b) $\frac{1}{\sqrt{2x + 100}}$

c) $\log_a (x + 2)$

6. Bestimmen Sie die Definitionsmenge und geben Sie die Lösung der Gleichung an.

a) $\frac{x - 9}{x} = \frac{4}{5}$

b) $\frac{15ac}{x} = \frac{9bc}{6bd}$

c) $\sqrt{x + 1} - 2 = \sqrt{x - 11}$

d) $7 + 4 \cdot \sqrt{x + 7} = 23$

7. Bestimmen Sie die Lösung für x

a) $\frac{2x - 4}{3} - \frac{x + 5}{4} = \frac{4x + 4}{6} + \frac{x + 6}{12}$

b) $\frac{2 - x}{7} + \frac{2x - 4}{14} - \frac{3x + 2}{21} = \frac{x - 5}{14} + \frac{5 - x}{7}$

c) $\frac{2x - a}{3} - \frac{x + a}{4} = \frac{4x + 4}{6} + \frac{x + 6}{12} - \frac{a - x}{3}$

Lösungen Übungsaufgaben

2. e) $30x + 4y - 72 = -120$

f) $-96r + 72s = 864$

g) $316x + 430y - 672 = -1\,330$

h) $-\frac{1}{4}x - \frac{11}{3}y = -10{,}5$

i) $\frac{11}{3}x + \frac{5}{2}y = -\frac{1}{6}$

3. a) $26yxz$

b) $74xyz$

c) $10a + 9b$

d) $4x - 4y - 4xy + 24$

e) $2x + 15y - 7xy + 18$

4. a) $L = \{27\}$ **b)** $L = \{-6\}$

c) $L = \left\{\frac{17}{3}\right\}$ **d)** $L = \{2\}$

e) $L = \left\{\frac{8}{9}\right\}$ **f)** $L = \left\{-\frac{6}{7}\right\}$

5. a) $x \geq -50$

b) $x > -50$

c) $x > -2$

6. a) $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$; $x = 45$

b) $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$; $b, d \neq 0$; $x = 10ad$

c) $D = \{x|x \geq 11\}_{\mathbb{R}}$; $x = 15$

d) $D = \{x|x \geq -7\}_{\mathbb{R}}$; $x = 9$

7. a) $x = -\frac{45}{4}$

b) $x = -\frac{19}{3}$

c) $x = \frac{3a + 14}{8}$

1.5 Potenzen

1.5.1 Potenzbegriff

Die Potenz ist die Kurzschreibweise für das Produkt gleicher Faktoren. Eine Potenz besteht aus der Basis (Grundzahl) und dem Exponenten (Hochzahl). Der Exponent gibt an, wie oft die Basis mit sich selbst multipliziert werden muss.

Beispiel 1: Potenzschreibweise

Schreiben Sie

a) das Produkt $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ als Potenz und

b) geben Sie den Potenzwert an.

Lösung: a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = \mathbf{2^5}$ b) $2^5 = \mathbf{32}$

1.5.2 Potenzgesetze

Potenz mit negativem Exponenten

Eine Potenz, die mit positivem Exponenten im Nenner steht, kann auch mit einem negativen Exponenten im Zähler geschrieben werden. Umgekehrt kann eine Potenz mit negativem Exponenten im Zähler als Potenz mit positivem Exponenten im Nenner geschrieben werden.

Beispiel 2: Exponentenschreibweise

Schreiben Sie die Potenzterme a) 2^{-3}; b) 10^{-3} mit entgegengesetztem Exponenten und geben Sie den Potenzwert an.

Lösung:

a) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = \mathbf{0{,}125}$

b) $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = \mathbf{0{,}001}$

Beispiel 3: Physikalische Einheiten

Schreiben Sie folgende physikalischen Benennungen mit umgekehrtem Exponenten.

a) $m \cdot s^{-2}$ b) $U \cdot min^{-1}$ c) $\frac{m}{s}$

Lösung:

a) $m \cdot s^{-2} = \mathbf{\frac{m}{s^2}}$ b) $U \cdot min^{-1} = \mathbf{\frac{U}{min}}$ c) $\frac{m}{s} = \mathbf{m \cdot s^{-1}}$

Addition und Subtraktion

Gleiche Potenzen oder Vielfaches von gleichen Potenzen, die in der Basis und im Exponenten übereinstimmen, lassen sich durch Addition und Subtraktion zusammenfassen **(Tabelle 1)**.

Beispiel 4: Addition und Subtraktion von Potenztermen

Die Potenzterme $3x^3 + 4y^2 + x^3 - 2y^2 + 2x^3$ sind zusammenzufassen.

Lösung: $3x^3 + 4y^2 + x^3 - 2y^2 + 2x^3$

$= (3 + 1 + 2)x^3 + (4 - 2)y^2 = \mathbf{6x^3 + 2y^2}$

$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n-Faktoren}} = a^n$

$a^n = b$

$a^n = \frac{1}{a^{-n}}$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

a Basis; $a > 0$

b Potenzwert

n Exponent

Tabelle 1: Potenzgesetze

Regel, Definition	algebraischer Ausdruck
Addition und Subtraktion Potenzen dürfen addiert oder subtrahiert werden, wenn sie denselben Exponenten und dieselbe Basis haben.	$r \cdot a^n \pm s \cdot a^n = (r \pm s) \cdot a^n$
Multiplikation Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man ihre Exponenten addiert und die Basis beibehält.	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert, indem man ihre Basen multipliziert und den Exponenten beibehält.	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
Division Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man ihre Exponenten subtrahiert und die Basis beibehält.	$\frac{a^n}{a^m} = a^n \cdot a^{-m} = a^{n-m}$
Potenzen mit gleichem Exponenten werden dividiert, indem man ihre Basen dividiert und den Exponenten beibehält.	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
Potenzieren Potenzen werden potenziert, indem man die Exponenten miteinander multipliziert.	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
Definition Jede Potenz mit dem Exponenten null hat den Wert 1.	$a^0 = 1$; für $a \neq 0$

Multiplikation von Potenzen

Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Potenzen als Produkt schreibt und dann ausmultipliziert oder indem man die Exponenten addiert.

Beispiel 1: Multiplikation

Berechnen Sie das Produkt $2^2 \cdot 2^3$ und geben Sie den Potenzwert an.

Lösung:

$2^2 \cdot 2^3 = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = \mathbf{32}$

oder $2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = \mathbf{32}$

Beispiel 2: Flächen- und Volumenberechnung

a) Die Fläche des Quadrates mit a = 2 m **(Bild 1)** und

b) das Volumen des Würfels für a = 2 m ist zu berechnen.

Lösung:

a) $A = a \cdot a = a^1 \cdot a^1 = a^{1+1} = \mathbf{a^2}$
$A = 2\ \text{m} \cdot 2\ \text{m} = 2 \cdot 2\ \text{m} \cdot \text{m} = 2^2\ \text{m}^2 = \mathbf{4\ m^2}$

b) $V = a \cdot a \cdot a = a^1 \cdot a^1 \cdot a^1 = a^{1+1+1} = \mathbf{a^3}$
$= 2\ \text{m} \cdot 2\ \text{m} \cdot 2\ \text{m} = 2 \cdot 2 \cdot 2\ \text{m} \cdot \text{m} \cdot \text{m}$
$= 2^3\ \text{m}^3 = \mathbf{8\ m^3}$

Division von Potenzen

Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man den Quotienten in ein Produkt umformt und dann die Regeln für die Multiplikation von Potenzen anwendet oder indem man den Nennerexponenten vom Zählerexponenten subtrahiert.

Beispiel 3: Division

Der Potenzterm $\frac{2^5}{2^3}$ ist zu berechnen.

Lösung:

$\frac{2^5}{2^3} = 2^5 \cdot \frac{1}{2^3} = 2^5 \cdot 2^{-3} = 2^{5-3} = 2^2 = \mathbf{4}$

oder $\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2 = \mathbf{4}$

Potenzieren von Potenzen

Potenzen werden potenziert, indem man das Produkt der Potenzen bildet und die Regeln für die Multiplikation von Potenzen anwendet oder indem man die Exponenten multipliziert.

Beispiel 4: Potenzieren

Berechnen Sie die Potenzterme

a) $(2^2)^3$ b) $(-3)^2$ c) -3^2

Lösung:

a) $(2^2)^3 = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 = 2^{2+2+2} = 2^6 = \mathbf{64}$
oder $(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6$

b) $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = \mathbf{9}$ c) $-3^2 = -(3 \cdot 3) = \mathbf{-9}$

$(-a)^2 = a^2$	$-a^2 = -(a^2)$

a Basis; $a > 0$

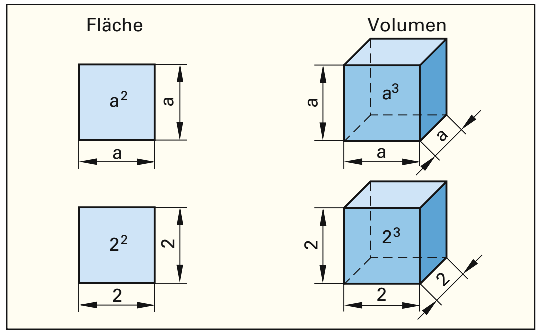


Bild 1: Fläche und Volumen

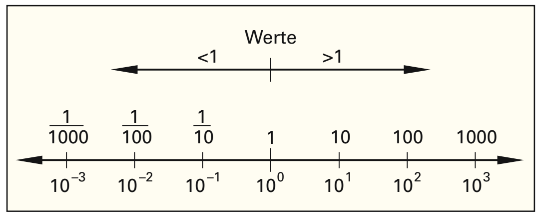


Bild 2: Zehnerpotenzen

Tabelle 1: Zehnerpotenzen, Schreibweise

ausgeschriebene Zahl	Potenz	Vorsatz bei Einheiten	
1 000 000 000	10^9	G	(Giga)
1 000 000	10^6	M	(Mega)
1 000	10^3	k	(Kilo)
100	10^2	h	(Hekto)
10	10^1	da	(Deka)
1	10^0	–	
0,1	10^{-1}	d	(Dezi)
0,01	10^{-2}	c	(Centi)
0,001	10^{-3}	m	(Milli)
0,000 001	10^{-6}	µ	(Mikro)
0,000 000 001	10^{-9}	n	(Nano)

Potenzen mit der Basis 10 (Zehnerpotenzen)

Potenzen mit der Basis 10 werden sehr häufig als verkürzte Schreibweise für sehr kleine oder sehr große Zahlen verwendet. Werte größer 1 können als Vielfaches von Zehnerpotenzen mit positivem Exponenten, Werte kleiner 1 als Vielfaches von Zehnerpotenzen mit negativem Exponenten dargestellt werden **(Bild 2** und **Tabelle 1)**.

Beispiel 5: Zehnerpotenzen

Schreiben Sie die Zehnerpotenzen
a) 20 µm b) 10 ml c) 3 kHz

Lösung:

a) $20 \cdot 10^{-6}$ m b) $10 \cdot 10^{-3}$ ℓ c) $3 \cdot 10^3$ Hz

1.6 Wurzelgesetze

1.6.1 Wurzelbegriff

Das Wurzelziehen oder Radizieren (von lat. radix = Wurzel) ist die Umkehrung des Potenzierens. Beim Wurzelziehen wird derjenige Wurzelwert gesucht, der mit sich selbst multipliziert den Wert unter der Wurzel ergibt. Eine Wurzel besteht aus dem Wurzelzeichen, dem Radikanden unter dem Wurzelzeichen und dem Wurzelexponenten. Bei Quadratwurzeln darf der Wurzelexponent 2 weggelassen werden $\Rightarrow \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$.

Eine Wurzel kann auch in Potenzschreibweise dargestellt werden. Deshalb gelten bei Wurzeln auch alle Potenzgesetze.

Beispiel 1: Potenzschreibweise und Wurzelziehen

Der Wurzelterm $\sqrt[2]{4} = \sqrt{4}$ ist

a) in Potenzschreibweise darzustellen und

b) der Wert der Wurzel zu bestimmen.

Lösung:

a) $\sqrt[2]{4} = \sqrt[2]{4^1} = \mathbf{4^{\frac{1}{2}}}$ b) $\sqrt[2]{4} = \sqrt{4} = 2$; denn $2 \cdot 2 = \mathbf{4}$

$\sqrt[n]{a} = x;\ a \geq 0$

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}};\ a \geq 0$

n	Wurzelexponent	a	Basis
x	Wurzelwert	m, $\frac{m}{n}$	Exponent

Tabelle 1: Wurzelgesetze

Regel	algebraischer Ausdruck
Addition und Subtraktion Wurzeln dürfen addiert und subtrahiert werden, wenn sie gleiche Exponenten und Radikanden haben.	$r \cdot \sqrt[n]{a} \pm s \cdot \sqrt[n]{a}$ $= (r \pm s) \cdot \sqrt[n]{a}$
Multiplikation Ist der Radikand ein Produkt, kann die Wurzel aus dem Produkt oder aus jedem Faktor gezogen werden.	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
Division Ist der Radikand ein Quotient, kann die Wurzel aus dem Quotienten oder aus Zähler und Nenner gezogen werden.	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
Potenzieren Beim Potenzieren einer Wurzel kann auch der Radikand potenziert werden.	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

1.6.2 Rechengesetze beim Wurzelrechnen

Addition und Subtraktion

Gleiche Wurzeln, die im Wurzelexponenten und im Radikand übereinstimmen, dürfen addiert und subtrahiert werden **(Tabelle 1)**.

Beispiel 2: Addition und Subtraktion von Wurzeln

Die Wurzelterme $3\sqrt{a}$, $-2\sqrt[3]{b}$, $+2\sqrt{a}$, $+4\sqrt[3]{b}$ sind zusammenzufassen.

Lösung:

$3\sqrt{a} - 2\sqrt[3]{b} + 2\sqrt{a} + 4\sqrt[3]{b} = (3 + 2)\sqrt{a} + (4 - 2)\sqrt[3]{b}$
$= \mathbf{5\sqrt{a} + 2\sqrt[3]{b}}$

Multiplikation und Division von Wurzeln

Ist beim Wurzelziehen der Radikand ein Produkt, so kann entweder aus dem Produkt oder aus jedem einzelnen Faktor die Wurzel gezogen werden. Bei einem Quotienten kann die Wurzel auch aus Zählerterm und Nennerterm gezogen werden **(Tabelle 1)**.

Beispiel 3: Multiplikation und Division

Berechnen Sie aus den Wurzeltermen $\sqrt{9 \cdot 16}$ und $\sqrt{\frac{9}{16}}$ den Wert der Wurzel.

Lösung:

$\sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{144} = \mathbf{12}$

oder $\sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{16} = 3 \cdot 4 = \mathbf{12}$

$\sqrt{\frac{9}{16}} = \mathbf{0{,}75}$

oder $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4} = \mathbf{0{,}75}$

Allgemeine Lösung des Wurzelterms $\sqrt[n]{a^n}$

Bei der Lösung des Wurzelterms $\sqrt[n]{a^n}$ sind zwei Fälle zu unterscheiden:

gerader Exponent: $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

ungerader Exponent: $\sqrt[n]{a^n} = a$

Die Lösung einer Quadratwurzel ist immer positiv.

Beispiel 4: Zwei Lösungen

Warum müssen beim Wurzelterm $\sqrt[2]{a^2}$ zwei Fälle unterschieden werden?

Lösung:

$\sqrt[2]{a^2} = |a|$

Fall 1: **a für a > 0**

Fall 2: **–a für a < 0**

Beispiel 1:

Für $|a| = 2$ gilt $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{(2)^2} = \sqrt{4} = \mathbf{2}$

1.6.3 Wurzelziehen mit dem Heron-Verfahren

Wurzelzahlen sind im Allgemeinen irrationale Zahlen, d. h. sie lassen sich nicht durch einen Bruch darstellen. Da sie beliebig viele Nachkommastellen haben, war ihre händische Berechnung schwierig. Die Berechnung mithilfe eines Näherungs-Verfahrens war aber schon den Griechen und noch früher den Babyloniern bekannt **(Bild 1)**.

Beispiel 1: Wurzel händisch ermitteln

Ermitteln Sie die Wurzel der Zahl 10 auf zwei Stellen nach dem Komma genau.

Lösung:

1. Abschätzung:
   $3 < \sqrt{10} < 4$, denn $3^2 = 9 < 10 < 16 = 4^2$
2. Durch Probieren:
   $3{,}1 < \sqrt{10} < 3{,}2$,
   denn $3{,}1^2 = 9{,}61 < 10 < 10{,}24 = 3{,}2^2$
3. Mit größerer Mühe findet man:
   $3{,}16 < \sqrt{10} < 3{,}17$, denn
   $3{,}16^2 = 9{,}9856 < 10 < 10{,}0489 = 3{,}17^2$

Einen schnelleren und effektiveren Weg zur Ermittlung einer Quadratzahl liefert ein Näherungsverfahren, das nach dem griechischen Mathematiker Heron[1] benannt wurde. Bei diesem Verfahren beginnt man mit einer natürlichen Zahl x_1, die in der näheren Umgebung der Quadratwurzel $\sqrt{a}$ liegt. Man berechnet der Reihe nach immer mit dem gleichen Schema Brüche, die sich der gesuchten Wurzelzahl immer genauer annähern.

Beispiel 2: Ermittlung der Quadratwurzel mit dem Heron-Verfahren

Ermitteln Sie die Wurzel der Zahl 10 auf vier Stellen nach dem Komma genau mit dem Verfahren von Heron.

Lösung:

1. Näherung:
   mit dem gewählten Startwert: $x_1 = 3$
2. Näherung:
   Mit der Formel $x_2 = \left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right) : 2 = \left(\frac{x_1}{2} + \frac{a}{2 \cdot x_1}\right)$ folgt:
   $x_2 = \left(3 + \frac{10}{3}\right) : 2 = \left(\frac{3}{2} + \frac{10}{6}\right) = \frac{19}{6} = 3{,}1666666\ldots$
3. Näherung:
   $x_3 = \left(x_1 + \frac{a}{x_2}\right) : 2 = \left(\frac{x_2}{2} + \frac{a}{2 \cdot x_2}\right) = \left(\frac{19}{12} + \frac{\frac{10}{19}}{3}\right) = \frac{19}{12} + \frac{30}{19}$
   $= \frac{19 \cdot 19 + 30 \cdot 12}{12 \cdot 19} = \frac{721}{228} \approx 3{,}162280\ldots$
4. Taschenrechnerwert: $\sqrt{10} \approx 3{,}16227766\ldots$

[1] Heron von Alexandria (griechischer Mathematiker und Mechaniker, 1. Jh. n. Chr.)

Bestimmung der Quadratwurzel aus a:

$x_2 = \left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right) : 2$

$x_3 = \left(x_2 + \frac{a}{x_2}\right) : 2; \quad x_4 = \left(x_3 + \frac{a}{x_3}\right) : 2;$

$x_5 = \ldots$

Allgemein:

$$\boxed{x_{n+1} = \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) : 2; \; a \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}}$$

x_1 Startwert
x_n Näherungswert
a Numerus der Quadratwurzel

Bild 1: Babylonische Keilschrifttafel zur Berechnung der Quadratwurzel

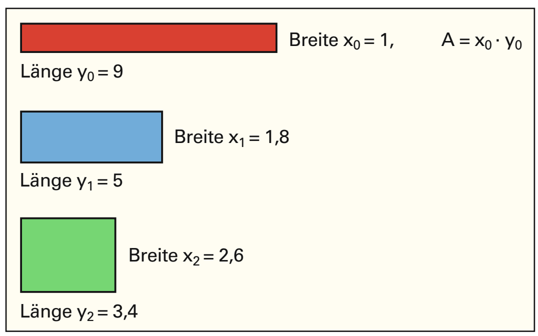


Bild 2: Geometrische Erläuterung des Heronverfahrens

Beim Heronverfahren wird von einem Quadrat mit dem Flächeninhalt A und der Kantenlänge $\sqrt{A}$ ausgegangen. Nimmt man ein Rechteck **(Bild 2)** mit der Fläche 9 (FE), so kann dieses durch Verkürzung der Länge y_0 und Verlängerung der Breite x_0 in Schritten an den Wert 3 angenähert werden. Die neue Länge $y_1 = 5$ erhält man mit dem Mittelwert $y_1 = \frac{x_0 + y_0}{2} = \frac{1 + 9}{2} = 5$ sowie $x_1 = \frac{A}{y_1}$. Durch Wiederholung dieser Schritte kann die gewünschte Genauigkeit erreicht werden.

Das Heron-Verfahren liefert schnell gute Näherungswerte für die Quadratwurzel.

Überprüfen Sie Ihr Wissen!

Beispielaufgaben

Wurzelziehen mit dem Heron-Verfahren

1. Bestimmen Sie die Quadratwurzel durch Anwendung mit dem Heron-Verfahren auf vier Stellen nach dem Komma.

a) $\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{3}$ **c)** $\sqrt{5}$

2. Ein Rechteck mit den Seitenlängen $a = 2$ und $b = 4$ soll in ein flächengleiches Quadrat umgewandelt werden.

a) Versuchen Sie über einen grafischen Ansatz das Heron-Verfahren auf das Problem anzuwenden.

b) Welche Kantenlänge hat das Quadrat?

Lösungen Beispielaufgaben

Wurzelziehen mit dem Heron-Verfahren

1. a) 1,41…

b) 1,73…

c) 2,236 068…

2. a) siehe Lösungsbuch

b) $2 \cdot \sqrt{2} = 2{,}828\,4271\ldots$

Übungsaufgaben

1. Stellen Sie die Gleichung oder Formel nach der geforderten Größe um.

a) $d_a = d + 2m$;	Umstellen nach m
b) $R_\vartheta = R_{20}(1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta)$;	Umstellen nach $\Delta\vartheta$
c) $\Delta R = R_{20} \cdot \alpha \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1)$;	Umstellen nach ϑ_1
d) $Z_L = \dfrac{R_c \cdot R_L}{R_c + R_L}$;	Umstellen nach R_L
e) $A = \dfrac{d^2\pi}{4}$;	Umstellen nach d
f) $\tan \alpha = \dfrac{m \cdot v^2}{g \cdot m \cdot r}$;	Umstellen nach v
g) $\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{g}$;	Umstellen nach g
h) $i = \dfrac{U}{R + \frac{R}{n}}$;	Umstellen nach R
i) $v = \dfrac{s}{t + a} + \dfrac{s}{t - a}$;	Umstellen nach s
j) $\dfrac{s - s_1}{t - t_1} = \dfrac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$;	Umstellen nach t_1

k) Der Abstand des Schwerpunktes vom Boden einer mit Flüssigkeit gefüllten Dose lässt sich mit der Formel

$$h = \frac{m \cdot H}{M - m}\sqrt{\frac{M}{m}} - \frac{m \cdot H}{M - m}$$

beschreiben **(Bild 1)**. Stellen Sie nach H um.

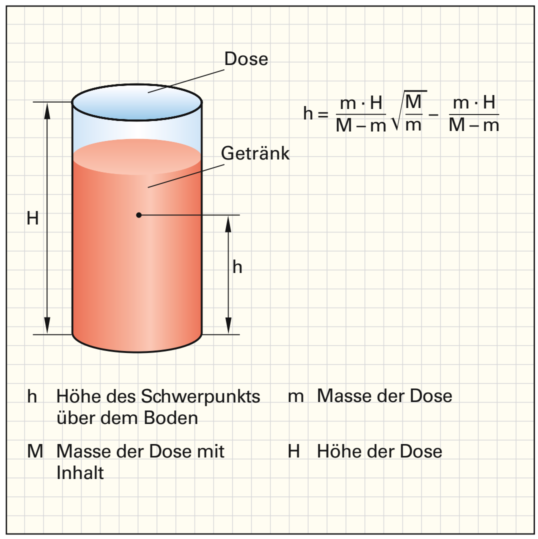


Bild 1: Schwerpunkt in Abhängigkeit des Inhalts

Gleichungen

2. Bestimmen Sie aus den Gleichungen die Lösung

a) $(x + 2)^2 + 6 = x^2 + 20$

b) $\dfrac{4(17 + 20x)}{11} = 8$

Lösungen Übungsaufgaben

1. a) $m = \dfrac{d_a - d}{2}$ **b)** $\Delta\vartheta = \dfrac{\frac{R_\vartheta}{R_{20}} - 1}{\alpha}$

c) $\vartheta_1 = \vartheta_2 - \dfrac{\Delta R}{R_{20} \cdot \alpha}$ **d)** $R_L = \dfrac{-Z_L R_c}{Z_L - R_c}$

e) $d = \sqrt{\dfrac{4A}{\pi}}$ **f)** $v = \sqrt{r \cdot g \cdot \tan \alpha}$

g) $g = \dfrac{b \cdot f}{b - f}$ **h)** $R = \dfrac{n \cdot U}{i(n + 1)}$

i) $s = \dfrac{v(t^2 - a^2)}{2t}$ **j)** $t_1 = \dfrac{t(s_2 - s_1) + t_2(s_1 - s)}{s_2 - s}$

k) $H = \dfrac{(M - m) \cdot h}{\left(\sqrt{\frac{M}{m}} - 1\right) \cdot m}$

2. a) $x = 2{,}5$ **b)** $x = \dfrac{1}{4}$