



Mathematik für die Fachhochschulreife mit Vektorrechnung FOS

Bearbeitet von Lehrern und Ingenieuren an beruflichen Schulen
(Siehe nächste Seite)

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsseldorfer Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 70319

Autoren des Buches „Mathematik für die Fachhochschulreife mit Vektorrechnung FOS“

Josef Dillinger	München
Bernhard Grimm	Sindelfingen, Leonberg
Gerhard Mack	Stuttgart
Thomas Müller	Ulm
Bernd Schiemann	Stuttgart, Ulm

Lektorat: Bernd Schiemann

Bildentwürfe: Die Autoren

Bilderstellung und -bearbeitung: YellowHand, 73257 Köngen, www.yellowhand.de

Das vorliegende Buch wurde auf der Grundlage der aktuellen amtlichen Rechtschreibregeln erstellt.

1. Auflage 2008
Druck 5 4 3

Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Behebung von Druckfehlern untereinander unverändert sind.

ISBN: 978-3-8085-7031-9

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der gesetzlich geregelten Fälle muss vom Verlag schriftlich genehmigt werden.

© 2008 by Verlag Europa-Lehrmittel, Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG, 42781 Haan-Gruiten
<http://www.europa-lehrmittel.de>

Umschlaggestaltung: Idee Bernd Schiemann, Ulm; Ausführung: Michael Maria Kappenstein, 60594 Frankfurt/Main

Satz, Grafik und Bildbearbeitung: YellowHand, 73257 Köngen, www.yellowhand.de

Druck: Konrad Tritsch Print und digitale Medien GmbH, 97199 Ochsenfurt-Hohestadt

Vorwort zur 1. Auflage

Das vorliegende Buch realisiert die Vorgaben der neuen Bildungspläne für den Erwerb der Fachhochschulreife im Fach Mathematik. Entsprechend den Vorgaben der Bildungspläne wird großer Wert auf die zunehmende Selbstorganisation des Lernprozesses, d.h. auf immer größer werdende Eigenständigkeit und Eigenverantwortung der Schülerinnen und Schüler im Erwerb von Wissen und Können, gelegt. Die mathematischen Inhalte werden vorwiegend anwendungsbezogen, d.h. an praktischen Beispielen eingeführt und behandelt. Jedoch kommen auch die theoretischen Grundlagen nicht zu kurz.

Zur Förderung handlungsorientierter Themenbearbeitung enthält das Buch eine große Anzahl von Beispielen, anhand derer eine Vielzahl von Aufgaben zu lösen sind. Zu jeder Aufgabe ist die Lösung auf derselben Seite angegeben. Das Buch ist deshalb auch zum selbstständigen Lernen geeignet. Im Unterricht können bessere Schüler selbstständig die Aufgaben lösen, während schwächere Schüler gezielt durch den Lehrer betreut werden können. Ein didaktisch aufbereiteter Lösungsband mit ausführlichen Schritten zur Lösung sowie eine Formelsammlung ergänzen das Buch.

Um unterschiedliche Vorkenntnisse auszugleichen, beginnt das Buch mit den Kapiteln „Algebraische Grundlagen“ und „Geometrische Grundlagen“. Wenn keine Kennzeichnung des Zahlensystems angegeben ist, wird mit reellen Zahlen gearbeitet.

Die Hauptabschnitte des Buches sind

- **Algebraische Grundlagen**
- **Geometrische Grundlagen**
- **Vektorrechnung**
- **Analysis**
- **Differenzialrechnung**
- **Integralrechnung**
- **Prüfungsvorbereitung**
- **Aufgaben aus der Praxis**
- **Projektaufgaben und**
- **Selbst organisiertes Lernen**
- **Übungsaufgaben – Prüfungsaufgaben**

Ihre Meinung interessiert uns!

Teilen Sie uns Ihre Verbesserungsvorschläge, Ihre Kritik aber auch Ihre Zustimmung zum Buch mit.

Schreiben Sie uns an die E-Mail-Adresse: info@europa-lehrmittel.de

Inhaltsverzeichnis

Mathematische Fachbegriffe	7	2.4.4 Sinussatz und Kosinussatz	42
1 Algebraische Grundlagen		2.4.5 Winkelberechnung	43
1.1 Term.....	9	Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen!	44
1.2 Gleichung.....	9	3 Vektorrechnung	
1.3 Definitionsmenge.....	9	3.1 Der Vektorbegriff	45
1.4 Potenzen.....	10	3.2 Darstellung von Vektoren im Raum.....	46
1.4.1 Potenzbegriff.....	10	3.3 Verknüpfungen von Vektoren.....	48
1.4.2 Potenzgesetze.....	10, 11	3.3.1 Vektoraddition	48
1.5 Wurzelgesetze.....	12	3.3.2 Verbindungsvektor, Vektorsubtraktion	50
1.5.1 Wurzelbegriff	12	3.3.3 Skalare Multiplikation, S-Multiplikation	51
1.5.2 Rechengesetze beim Wurzelrechnen.....	12	3.3.4 Einheitsvektor	52
1.6 Logarithmengesetze.....	13	Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen!	53
1.6.1 Logarithmusbegriff	13	3.3.5 Strecke, Mittelpunkt	54
1.6.2 Rechengesetze beim Logarithmus.....	13	3.3.6 Skalarprodukt	55
1.6.3 Basisumrechnung beim Logarithmus.....	14	Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen!	57
Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen!	15	3.4 Lineare Abhängigkeit von Vektoren.....	58
1.7 Funktionen und Gleichungssysteme	16	3.4.1 Zwei Vektoren im Raum.....	58
1.7.1 Rechtwinkliges Koordinatensystem	16	3.4.2 Drei Vektoren im Raum	59
1.7.2 Funktionen	17	3.4.3 Vier Vektoren im Raum	60
1.7.3 Lineare Funktionen.....	18	3.4.4 Basisvektoren	61
1.7.3.1 Ursprungsgeraden	18	3.4.4.1 Eigenschaften von linear unabhängigen Vektoren	61
1.7.3.2 Allgemeine Gerade	19	3.4.4.2 Koordinatendarstellung von Vektoren.....	62
Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen!	20	3.5 Orthogonale Projektion.....	63
1.7.3.3 Betragsfunktion	21	3.6 Lotvektoren	64
1.7.3.4 Ungleichungen	22	3.6.1 Lotvektoren zu einem einzelnen Vektor.....	64
1.7.4 Quadratische Funktionen.....	23	3.6.2 Lotvektoren einer Ebene.....	65
1.7.4.1 Parabeln mit Scheitel im Ursprung	23	3.7 Vektorprodukt	66
1.7.4.2 Verschieben von Parabeln	24	Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen!	69
1.7.4.3 Normalform und Nullstellen von Parabeln	25	3.8 Vektorgleichung einer Geraden im Raum	70
1.7.4.4 Zusammenfassung der Lösungsarten.....	26	3.9 Orthogonale Projektion von Punkten und Geraden auf eine Koordinatenebene.....	74
Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen!	27	3.10 Gegenseitige Lage von Geraden.....	76
1.7.5 Lineare Gleichungssysteme LGS	28	3.11 Abstandsberechnungen.....	81
1.7.5.1 Lösungsverfahren für LGS	28	3.11.1 Abstand Punkt–Gerade und Lotfußpunkt.....	81
1.7.5.2 Lösung eines LGS mit einer Matrix	29	3.11.2 Kürzester Abstand zweier windschiefer Geraden..	83
1.7.5.3 Sarrus-Regel	30	3.11.3 Abstand zwischen parallelen Geraden	84
1.7.5.4 Grafische Lösung eines LGS	31	Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen!	85
Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen!	32	3.12 Ebenengleichung.....	86
2 Geometrische Grundlagen		3.12.1 Vektorielle Parameterform der Ebene	86
2.1 Flächeninhalt geradlinig begrenzter Flächen.....	33	3.12.2 Vektorielle Dreipunkteform einer Ebene	87
2.2 Flächeninhalt kreisförmig begrenzter Flächen.....	34	3.12.3 Parameterfreie Normalenform	88
Ü Überprüfen Sie Ihr Wissen!	35	3.13 Ebene–Punkt	89
2.3 Volumenberechnung.....	36	3.13.1 Punkt P liegt in der Ebene E	89
2.3.1 Körper gleicher Querschnittsfläche	36	3.13.2 Abstand eines Punktes P von der Ebene E.....	89
2.3.2 Spitze Körper	37	3.14 Ebene–Gerade	90
2.3.3 Abgestumpfte Körper	38	3.14.1 Gerade parallel zur Ebene	90
2.3.4 Kugelförmige Körper	39	3.14.2 Gerade liegt in der Ebene.....	90
2.4 Trigonometrische Beziehungen	40	3.14.3 Gerade schneidet Ebene.....	90
2.4.1 Ähnliche Dreiecke.....	40	3.15 Lagebezeichnung von Ebenen	92
2.4.2 Rechtwinklige Dreiecke.....	40		
2.4.3 Einheitskreis.....	41		

3.15.1	Parallele Ebenen.....	92	5.5	Newtonsches Näherungsverfahren (Tangentenverfahren).....	136
3.15.2	Sich schneidende Ebenen	92	5.6	Extremwertberechnungen.....	138
3.15.3	Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen	93	5.6.1	Extremwertberechnung mit einer Hilfsvariablen.....	140
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	94	5.6.2	Randextremwerte.....	141
4	Analysis		Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	143
4.1	Potenzfunktionen.....	95	5.7	Kurvendiskussion	144
4.2	Wurzelfunktionen	96	5.7.1	Differenzierbarkeit von Funktionen.....	144
4.2.1	Allgemeine Wurzelfunktionen.....	96	5.7.2	Monotonie.....	145
4.2.2	Arten von quadratischen Wurzelfunktionen	97	5.7.3	Hochpunkte und Tiefpunkte	146
4.3	Ganzrationale Funktionen höheren Grades	98	5.7.4	Wendepunkte.....	147
4.3.1	Funktionen des dritten Grades.....	98	5.7.5	Einparametrische Funktionenschar.....	149
4.3.2	Funktionen des vierten Grades	99	5.7.6	Tangenten und Normalen.....	152
4.3.3	Nullstellenberechnung.....	99	5.7.6.1	Tangenten und Normalen in einem Kurvenpunkt	152
4.3.3.1	Nullstellenberechnung bei biquadratischen Funktionen	99	5.7.6.2	Tangenten parallel zu einer Geraden.....	153
4.3.3.2	Nullstellenberechnung mit dem Nullprodukt	100	5.7.6.3	Anlegen von Tangenten an K_f von einem beliebigen Punkt aus.....	154
4.3.3.3	Nullstellenberechnung durch Abspalten eines Linearfaktors.....	101	5.7.6.4	Zusammenfassung Tangentenberechnung	155
4.3.3.4	Numerische Methoden	103	5.7.7	Ermittlung von Funktionsgleichungen	156
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	105	5.7.7.1	Ganzrationale Funktion.....	156
4.3.4	Arten von Nullstellen	106	5.7.7.2	Ganzrationale Funktion mit Symmetrie- eigenschaft.....	159
4.4	Gebrochenrationale Funktionen	107	5.7.7.3	Exponentialfunktion	160
4.4.1	Definitionsmenge.....	107	5.7.7.4	Sinusförmige Funktion	161
4.4.2	Polstellen.....	107	Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	162
4.4.3	Definitionslücke.....	107	6	Integralrechnung	
4.4.4	Grenzwerte.....	108	6.1	Einführung in die Integralrechnung.....	163
4.4.5	Grenzwertsätze.....	109	6.1.1	Aufsuchen von Flächeninhaltsfunktionen.....	164
4.4.6	Asymptoten	110	6.1.2	Stammfunktionen.....	165
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	111	6.2	Integrationsregeln.....	166
4.5	Exponentialfunktion	112	6.2.1	Potenzfunktionen.....	166
4.6	e-Funktion	113	6.2.2	Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen	166
4.7	Logarithmische Funktion.....	114	6.3	Das bestimmte Integral.....	167
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	115	6.3.1	Geradlinig begrenzte Fläche.....	167
4.7	Trigonometrische Funktionen	116	6.3.2	„Krummlinig“ begrenzte Fläche	168
4.7.1	Sinusfunktion und Kosinusfunktion	116	6.4	Berechnung von Flächeninhalten	169
4.7.2	Tangensfunktion und Kotangensfunktion	117	6.4.1	Integralwert und Flächeninhalt	169
4.7.3	Beziehungen zwischen trigonometrischen Funktionen	117	6.4.2	Flächen für Schaubilder mit Nullstellen	170
4.7.4	Allgemeine Sinusfunktion und Kosinus- funktion	118	6.4.3	Musteraufgabe zur Flächenberechnung.....	171
4.8	Eigenschaften von Funktionen.....	120	6.4.4	Regeln zur Vereinfachung bei Flächen	172
4.8.1	Symmetrie bei Funktionen	120	6.4.5	Integrieren mit variabler Grenze	174
4.8.2	Umkehrfunktionen	121	Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	175
4.8.3	Monotonie und Umkehrbarkeit.....	124	6.5	Flächenberechnung zwischen Schaubildern.....	176
4.8.4	Stetigkeit von Funktionen.....	125	6.5.1	Flächenberechnung im Intervall	176
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	126	6.5.2	Flächen zwischen zwei Schaubildern	177
5	Differenzialrechnung		6.5.3	Flächenberechnung mit der Differenzfunktion	178
5.1	Erste Ableitung $f'(x)$	127	6.5.4	Musteraufgabe zu gelifteten Schaubildern	179
5.2	Differenzialquotient.....	128	Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	180
5.3	Ableitungsregeln.....	130	6.5.5	Integration gebrochenrationaler Funktionen.....	181
5.4	Höhere Ableitungen.....	133	6.6	Numerische Integration.....	182
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	135			

6.6.1	Streifenmethode mit Rechtecken.....	182	10.1.3	Determinantenverfahren	221
6.6.2	Flächenberechnung mit Trapezen.....	183	10.1.4	Geometrische Grundlagen	222
6.6.3	Flächenberechnung mit Näherungs- verfahren.....	185	10.1.5	Vektoren 1	224
6.7	Volumenberechnung.....	186		Vektoren 2	225
6.7.1	Rotation um die x-Achse	186		Vektoren in Ebene \mathbb{R}^2 und Raum \mathbb{R}^3	226
6.7.2	Rotation um die y-Achse	190		Vektoren und Ebenen im Raum \mathbb{R}^3	227
6.7.3	Zusammenfassung von Rotationskörperarten	193	10.1.6	Nullstellen.....	228
Ü	Überprüfen Sie Ihr Wissen!	194	10.1.7	Exponentialfunktionen	229
6.8	Anwendungen der Integralrechnung	195	10.1.8	Trigonometrische Funktionen	230
6.8.1	Zeitintegral der Geschwindigkeit.....	195	10.1.9	Kurvendiskussion	231
6.8.2	Mechanische Arbeit W.....	195	10.1.10	Flächenberechnungen	232
6.8.3	Elektrische Ladung Q	196	10.2	Musterprüfungen	233
6.8.4	Mittelwertberechnungen	196	10.2.1	Kurvendiskussion mit ganzrationalen Funktionen	233
7	Prüfungsvorbereitung		10.2.2	Extremwertberechnung mit ganzrationalen Funktionen	234
7.1	Ganzrationale Funktionen.....	197	10.2.3	e-Funktionen	235
7.2	Exponentialfunktion	199	10.2.4	Sinusfunktionen	237
7.3	Goniometrische Gleichungen	201	10.2.5	Gebrochenrationale Funktionen	239
7.4	Gebrochenrationale Funktionen	202	10.2.6	e-Funktion und In-Funktion verknüpft mit rationaler Funktion	240
7.5	Vektoraufgabe Prisma.....	203	10.2.7	Vektorrechnung	241
7.6	Vektoraufgabe Quader.....	204	10.2.8	Extremwertaufgaben	242
7.7	Vektoraufgabe Pyramide	205	11	Anhang	
8	Aufgaben aus der Praxis und Projektaufgaben			Mathematische Zeichen, Abkürzungen und Formelzeichen.....	243
8.1	Kostenrechnung	206		Literaturverzeichnis	245
8.2	Optimierung einer Oberfläche	207		Sachwortverzeichnis	246
8.3	Optimierung einer Fläche	207			
8.4	Flächenmoment.....	208			
8.5	Sammellinse einer Kamera	209			
8.6	Abkühlvorgang.....	210			
8.7	Entladevorgang	210			
8.8	Wintergarten.....	211			
8.9	Bauvorhaben Kirche.....	211			
8.10	Aushub Freibad	211			
8.11	Berechnung von elektrischer Arbeit und Leistung.....	212			
8.12	Sinusförmige Wechselgrößen.....	212			
8.13	Effektivwertberechnung.....	213			
9	Projektaufgaben				
9.1	Pyramide	214			
9.2	Einfülltrichter einer Getreidemühle	215			
9.3	Anwendung der Differenzialrechnung	216			
10	Selbst organisiertes Lernen Übungsaufgaben – Prüfungs- aufgaben				
10.1	Übungsaufgaben.....	218			
10.1.1	Algebraische Grundlagen.....	218			
10.1.2	Quadratische Funktionen.....	220			

Mathematische Fachbegriffe

Ableitungsfunktion

Ist die Funktion $f'(x)$, deren Werte die Steigungen des Grafen der Funktion $f(x)$ angeben.

Abgestumpfte Körper

Kegelstumpf und Pyramidenstumpf werden so bezeichnet.

Achsenschnittpunkte

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, z. B. x-, y- oder z-Achse.

Äquivalenzumformung

Umformen von Gleichungen, bei denen sich die Lösungsmenge nicht ändert.

Arkus-Funktion

Als Arkus-Funktionen werden die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen bezeichnet.

Asymptote

Eine Gerade, der sich eine ins Unendliche verlaufende Kurve beliebig nähert, ohne sie zu berühren oder zu schneiden.

Biquadratische Gleichung

Es handelt sich um eine Gleichung 4. Grades mit nur geradzahligem Exponenten ($ax^4 + bx^2 + c = 0$).

Differenzenquotient

Ist die Steigung der Sekante durch zwei Punkte der Funktion.

Differenzialquotient

Grenzwert des Differenzenquotienten, entspricht der Steigung der Tangente.

Differenzierbarkeit von Funktionen

Eine Funktion ist differenzierbar, wenn sie an jeder Stelle eine eindeutig bestimmte Tangente mit einer endlichen Steigung hat.

Ebenengleichung

Fläche, die z. B. durch drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, festgelegt ist.

e-Funktion

Exponentialfunktionen mit der Basis e , natürliche Exponentialfunktionen genannt.

Exponentialfunktion

Bei der Exponentialfunktion ist die Hochzahl die unabhängige Variable.

Funktion

Eindeutige und eineindeutige Zuordnungen von Elementen nennt man Funktionen.

Ganze Zahlen

Sie können positiv, negativ oder null sein.

Ganzrationale Funktion

Ganzrationale Funktionen bestehen aus der Addition verschiedener Potenzfunktionen.

Gebrochenrationale Funktion

Bei einer gebrochenrationalen Funktion steht im Zähler das Zählerpolynom und im Nenner das Nennerpolynom.

Gerade

Das Schaubild für die Darstellung linearer Zusammenhänge (lineare Funktion) heißt Gerade.

Gleichung

Eine Gleichung entsteht durch Verbindung zweier Terme durch ein Gleichheitszeichen.

GTR

Grafikfähiger Taschenrechner. Enthält ein Anzeigefeld zur grafischen Darstellung von z. B. Schaubildern, Wertetabellen.

Hessesche Normalenform HNF

In der Normalengleichung wird der Normaleneinheitsvektor statt des Normalenvektors verwendet.

Imaginäre Zahlen

Scheinbare (unvorstellbare) Zahlen, z. B. j ; $3j$; $-2j$.

Integrieren

Integrieren heißt, eine abgeleitete Funktion wieder in die ursprüngliche Form zurückzuführen.

Irrationale Zahlen

Sind Dezimalzahlen mit unendlich vielen, nichtperiodischen Nachkommaziffern, z. B. Wurzelzahlen, die Konstanten π und e .

Kartesische Koordinaten

Achsen stehen senkrecht aufeinander und haben die Einheit 1 LE.

Komplexe Zahlen

Zahlen, die reell und/oder imaginär sind.

Konstante Funktion

Funktionswert bleibt für alle x konstant.

Koordinatensystem

Mit Koordinaten (= Zahlen, die die Lage von Punkten angeben) lassen sich diese in einer Ebene oder im Raum eindeutig festlegen.

Lineare Funktion

Ganzrationale Funktion 1. Grades.

Lineares Gleichungssystem LGS

System von Lineargleichungen, deren Variablen die Hochzahl 1 enthalten.

Logarithmische Funktionen

Sie sind die Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen.

Logarithmus

Logarithmieren heißt, die Hochzahl (= Exponent) einer bestimmten Potenz berechnen.

Natürliche Zahlen

Positive, ganze Zahlen einschließlich der Null.

Numerische Integration

Numerische Integration heißt, den Flächeninhalt näherungsweise berechnen, z.B. durch Auszählen von Flächen. (Anwendung, wenn keine Stammfunktion bekannt ist.)

Nullstellen

Die x-Werte der Schnittpunkte eines Schaubildes mit der x-Achse nennt man Nullstellen.

Orthogonal

Rechtwinklig. Orthogonale (rechtwinklige) Geraden haben einen Winkel von 90° zueinander.

Parabel

Schaubild einer quadratischen Funktion.

Pol

Stelle, an der eine senkrechte Asymptote vorliegt.

Polynom

Bezeichnet in der Mathematik eine vielgliedrige Größe.

Potenz

Die Potenz ist die Kurzschreibweise für das Produkt gleicher Faktoren.

Potenzfunktion

Sind Funktionen, die den Term x^n enthalten.

Quadranten

Zeichenebenen in Koordinatensystemen.

Quadratische Gleichung

Ist eine Gleichung 2. Grades ($ax^2 + bx + c = 0$).

Quadratwurzel

Beim Wurzelziehen (Radizieren) wird der Wert gesucht, der mit sich selbst multipliziert den Wert unter der Wurzel ergibt.

Rationale Zahlen

Zahlen, die durch Brüche darstellbar sind.

Reelle Zahlen

Zahlen, die rational oder irrational sind.

Relation

Eindeutige oder mehrdeutige Zuordnung.

Skalar

Größe, die durch einen bestimmten reellen Zahlenwert festgelegt ist.

Spitze Körper

Pyramide und Kegel werden als spitze Körper bezeichnet (Prismatische Körper).

Spurgerade

Die gemeinsamen Punkte (Schnittpunkte) einer Ebene mit einer Koordinatenebene bilden die Spurgerade.

Spurpunkte

Spurpunkte nennt man die Durchstoßpunkte (Schnittpunkte) einer Geraden mit den Koordinatenebenen.

Steigung

Als Steigung wird das Verhältnis des Δy -Wertes zum Δx -Wert eines Steigungsdreiecks, z.B. einer Tangente, bezeichnet.

Stetigkeit von Funktionen

Stetige Funktionen können durch einen lückenlosen, zusammenhängenden Kurvenzug dargestellt werden.

Term

Mathematischer Ausdruck, der aus Zahlen, Variablen und Rechenzeichen bestehen kann.

Trigonometrische Funktionen

Winkelfunktionen, z.B. $\sin x$, $\tan x$, $\arctan x$.

Umkehrfunktion

Funktion, bei der die Zuordnung der Variablen vertauscht wird.

Variablen

Das sind Buchstaben, z.B. x , y , an deren Stelle Zahlen der Grundmenge gesetzt werden.

Vektor

Physikalische oder mathematische Größe, die durch einen Pfeil dargestellt wird und durch Richtung und Betrag festgelegt ist.

Wurzelfunktionen

Das sind Potenzfunktionen, die gebrochene Hochzahlen enthalten.

1 Algebraische Grundlagen

1.1 Term

Terme können Zahlen, z.B. -1 ; $\frac{1}{2}$; 2 oder Variablen, z.B. a ; x ; y , sein. Werden Terme durch Rechenoperationen verbunden, so entsteht wieder ein Term.

1.2 Gleichung

Eine Gleichung besteht aus einem Linksterm T_l und aus einem Rechtsterm T_r .

Werden zwei Terme durch das Gleichheitszeichen miteinander verbunden, so entsteht die Gleichung $T_l = T_r$.

Beispiel 1: Gleichung

Stellen Sie die beiden Terme T_l : $x + 2$ und T_r : -4 als Gleichung dar.

Lösung: $x + 2 = -4$

Werden an Gleichungen Rechenoperationen durchgeführt, so muss auf jeder Seite der Gleichung diese Rechenoperation durchgeführt werden (**Tabelle 1**). Eine Gleichung mit mindestens einer Variablen stellt eine Aussageform dar. Diese Aussageform kann eine wahre oder falsche Aussage ergeben, wenn den Variablen Werte zugeordnet werden.

Ein Wert x einer Gleichung heißt Lösung, wenn beim Einsetzen von x in die Gleichung eine wahre Aussage entsteht.

Beispiel 2: Lösung einer Gleichung

Ermitteln Sie die Lösung der Gleichung $x + 2 = -4$

Lösung: $x + 2 = -4$ | -2
 $x + 2 - 2 = -4 - 2$
 $x = -6$

1.3 Definitionsmenge

Die Definitionsmenge eines Terms kann einzelne Werte oder ganze Bereiche aus der Grundmenge ausschließen (**Tabelle 2**).

Beispiel 3: Definitionsmenge

Die Definitionsmenge der Gleichung $\sqrt{x-1} = \frac{2}{(x+1)(x-1)}$; $x \in \mathbb{R}$ ist zu bestimmen.

Lösung: Die Definitionsmenge D_1 des Linksterms wird durch die Wurzel eingeschränkt.
 $D_1 = \{x | x \geq 1 \wedge x \in \mathbb{R}\}$
 Die Definitionsmenge D_2 des Rechtsterms wird durch den Nenner eingeschränkt. $D_2 = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$
 Für die Gesamtdefinitionsmenge D gilt:
 $D = D_1 \cap D_2 = \{x | x > 1 \wedge x \in \mathbb{R}\}$

Operation	Allgemein	Beispiel
Addition	$T_l + T = T_r + T$	$x - a = 0$ $+ a$ $x - a + a = 0 + a$ $x = a$
Subtraktion	$T_l - T = T_r - T$	$x + a = 0$ $- a$ $x + a - a = 0 - a$ $x = -a$
Multiplikation	$T_l \cdot T = T_r \cdot T$	$\frac{1}{2} \cdot x = 1$ $\cdot 2$ $\frac{1}{2} \cdot x \cdot 2 = 1 \cdot 2$ $x = 2$
Division	$\frac{T_l}{T} = \frac{T_r}{T}$; $T \neq 0$	$2 \cdot x = 4$ $: 2$ $\frac{2 \cdot x}{2} = \frac{4}{2}$ $x = 2$

Term	Einschränkung	Beispiel
Bruchterm $T_B = \frac{Z(x)}{N(x)}$	$N(x) \neq 0$	$T(x) = \frac{x+1}{x-1}$ $x - 1 \neq 0$ $x \neq 1$ $D = \{x x \neq 1\}$
Wurzelterm $T_W = \sqrt{x}$	$x \geq 0$ x größer gleich 0	$T(x) = \sqrt{x-1}$ $x - 1 \geq 0$ $x \geq 1$ $D = \{x x \geq 1\}$
Logarithmsterm $T_L = \log_a x$	$x > 0$ x größer 0	$T(x) = \log_{10} x$ $x > 0$ $D = \{x x > 0\}$

Bei Aufgaben aus der Technik oder Wirtschaft ergeben sich häufig einschränkende Bedingungen in technischer, technologischer oder ökonomischer Hinsicht. So kann die Zeit nicht negativ sein oder die Temperatur nicht kleiner 273 K werden. Diese eingeeengte Definitionsmenge ist dann die eigentliche Definitionsmenge einer Gleichung.

Aufgaben:

1. **Lösungsmenge.** Bestimmen Sie die Lösung für $x \in \mathbb{R}$.

- a) $4(2x - 6) = 2x - (x + 4)$
- b) $(2x - 1)(3x - 2) = 6(x + 2)(x - 4)$
- c) $\frac{x+2}{5} - 2 = 4$
- d) $\frac{2-x}{2} + a = 1$
- e) $\frac{2x-a}{4} - b = 2$
- f) $\frac{3x-5}{5} = \frac{2x-3}{4}$

2. **Lösen von Gleichungen.** Lösen Sie die Gleichungen nach allen Variablen auf.

a) $h = \frac{1}{2}g \cdot t^2$ b) $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

3. **Definitions- und Lösungsmenge.** Geben Sie die Definitionsmenge und die Lösungsmenge an.

a) $\sqrt{2x+2} = \sqrt{4x-8}$ b) $\frac{3x-1}{x+2} = \frac{2-3x}{2-x}$

1. a) $x = \frac{20}{7}$	b) $x = -10$	c) $x = 28$	d) $x = 2a$
e) $x = \frac{1}{2}a + 2b + 4$			
f) $x = \frac{5}{2}$			
2. a) $g = \frac{2h}{t^2}$; $t = \pm \sqrt{\frac{2h}{g}}$			
b) $R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$; $R_1 = \frac{R \cdot R_2}{R_2 - R}$; $R_2 = \frac{R \cdot R_1}{R_1 - R}$			
3. a) $D = \{x x \geq 2\}_{\mathbb{R}}$; $L = \{5\}$			
b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$; $L = \left\{ \frac{6}{11} \right\}$			

1.4 Potenzen

1.4.1 Potenzbegriff

Die Potenz ist die Kurzschreibweise für das Produkt gleicher Faktoren. Eine Potenz besteht aus der Basis (Grundzahl) und dem Exponenten (Hochzahl). Der Exponent gibt an, wie oft die Basis mit sich selbst multipliziert werden muss.

Beispiel 1: Potenzschreibweise

Schreiben Sie

- a) das Produkt $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ als Potenz und
 b) geben Sie den Potenzwert an.

Lösung: a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$ b) $2^5 = 32$

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-Faktoren}} = a^n$$

$a^n = b$

$a^n = \frac{1}{a^{-n}}$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

a Basis; $a > 0$ n Exponent
 b Potenzwert

1.4.2 Potenzgesetze

Potenz mit negativem Exponenten

Eine Potenz, die mit positivem Exponenten im Nenner steht, kann auch mit einem negativen Exponenten im Zähler geschrieben werden. Umgekehrt kann eine Potenz mit negativem Exponenten im Zähler als Potenz mit positivem Exponenten im Nenner geschrieben werden.

Beispiel 2: Exponentenschreibweise

Schreiben Sie die Potenzterme a) 2^{-3} ; b) 10^{-3} mit entgegengesetztem Exponenten und geben Sie den Potenzwert an.

Lösung:

- a) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125$
 b) $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0,001$

Beispiel 3: Physikalische Benennungen

Schreiben Sie folgende physikalischen Benennungen mit umgekehrtem Exponenten.

- a) $m \cdot s^{-2}$ b) $U \cdot \text{min}^{-1}$ c) $\frac{m}{s}$

Lösung:

- a) $m \cdot s^{-2} = \frac{m}{s^2}$ b) $U \cdot \text{min}^{-1} = \frac{U}{\text{min}}$ c) $\frac{m}{s} = m \cdot s^{-1}$

Addition und Subtraktion

Gleiche Potenzen oder Vielfaches von gleichen Potenzen, die in der Basis und im Exponenten übereinstimmen, lassen sich durch Addition und Subtraktion zusammenfassen (**Tabelle 1**).

Beispiel 4: Addition und Subtraktion von Potenztermen

Die Potenzterme $3x^3 + 4y^2 + x^3 - 2y^2 + 2x^3$ sind zusammenzufassen.

Lösung: $3x^3 + 4y^2 + x^3 - 2y^2 + 2x^3$
 $= (3 + 1 + 2)x^3 + (4 - 2)y^2 = 6x^3 + 2y^2$

Tabelle 1: Potenzgesetze

Regel, Definition	algebraischer Ausdruck
Addition und Subtraktion Potenzen dürfen addiert oder subtrahiert werden, wenn sie denselben Exponenten und dieselbe Basis haben.	$r \cdot a^n \pm s \cdot a^n = (r \pm s) \cdot a^n$
Multiplikation Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man ihre Exponenten addiert und die Basis beibehält. Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert, indem man ihre Basen multipliziert und den Exponenten beibehält.	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
Division Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man ihre Exponenten subtrahiert und die Basis beibehält. Potenzen mit gleichem Exponenten werden dividiert, indem man ihre Basen dividiert und den Exponenten beibehält.	$\frac{a^n}{a^m} = a^n \cdot a^{-m} = a^{n-m}$ $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
Potenzieren Potenzen werden potenziert, indem man die Exponenten miteinander multipliziert.	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
Definition Jede Potenz mit dem Exponenten null hat den Wert 1.	$a^0 = 1; \text{ für } a \neq 0$

Multiplikation von Potenzen

Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Potenzen als Produkt schreibt und dann ausmultipliziert oder indem man die Exponenten addiert.

Beispiel 1: Multiplikation

Berechnen Sie das Produkt $2^2 \cdot 2^3$ und geben Sie den Potenzwert an.

Lösung:

$$2^2 \cdot 2^3 = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 32$$

$$\text{oder } 2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32$$

Beispiel 2: Flächen- und Volumenberechnung

- a) Die Fläche des Quadrates mit $a = 2 \text{ m}$ (**Bild 1**) und
- b) das Volumen des Würfels für $a = 2 \text{ m}$ ist zu berechnen.

Lösung:

a) $A = a \cdot a = a^1 \cdot a^1 = a^{1+1} = a^2$

$$A = 2 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} = 2 \cdot 2 \text{ m} \cdot \text{m} = 2^2 \text{ m}^2 = 4 \text{ m}^2$$

b) $V = a \cdot a \cdot a = a^1 \cdot a^1 \cdot a^1 = a^{1+1+1} = a^3$

$$= 2 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \text{ m} \cdot \text{m} \cdot \text{m}$$

$$= 2^3 \text{ m}^3 = 8 \text{ m}^3$$

Division von Potenzen

Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man den Quotienten in ein Produkt umformt und dann die Regeln für die Multiplikation von Potenzen anwendet oder indem man den Nennerexponenten vom Zählerexponenten subtrahiert.

Beispiel 3: Division

Der Potenzterm $\frac{2^5}{2^3}$ ist zu berechnen.

Lösung:

$$\frac{2^5}{2^3} = 2^5 \cdot \frac{1}{2^3} = 2^5 \cdot 2^{-3} = 2^{5-3} = 2^2 = 4$$

$$\text{oder } \frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2 = 4$$

Potenzieren von Potenzen

Potenzen werden potenziert, indem man das Produkt der Potenzen bildet und die Regeln für die Multiplikation von Potenzen anwendet oder indem man die Exponenten multipliziert.

Beispiel 4: Potenzieren

Berechnen Sie die Potenzterme

a) $(2^2)^3$ b) $(-3)^2$ c) -3^2

Lösung:

a) $(2^2)^3 = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 = 2^{2+2+2} = 2^6 = 64$

$$\text{oder } (2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6$$

b) $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$ c) $-3^2 = -(3 \cdot 3) = -9$

$(-a)^2 = a^2$

$-a^2 = -(-a^2)$

a Basis; $a > 0$

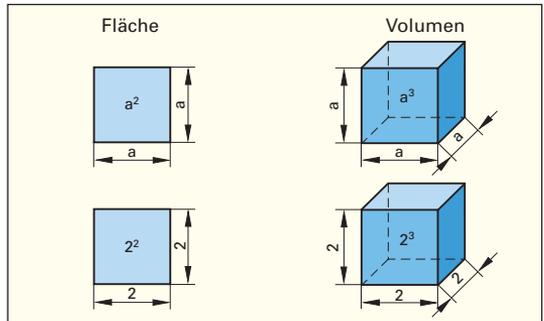


Bild 1: Fläche und Volumen

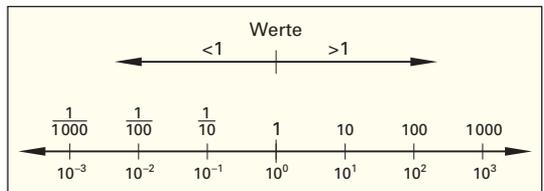


Bild 2: Zehnerpotenzen

Tabelle 1: Zehnerpotenzen, Schreibweise			
ausgeschriebene Zahl	Potenz	Vorsatz bei Einheiten	
1 000 000 000	10 ⁹	G	(Giga)
1 000 000	10 ⁶	M	(Mega)
1 000	10 ³	k	(Kilo)
100	10 ²	h	(Hekto)
10	10 ¹	da	(Deka)
1	10 ⁰	-	
0,1	10 ⁻¹	d	(Dezi)
0,01	10 ⁻²	c	(Centi)
0,001	10 ⁻³	m	(Milli)
0,000 001	10 ⁻⁶	μ	(Mikro)
0,000 000 001	10 ⁻⁹	n	(Nano)

Potenzen mit der Basis 10 (Zehnerpotenzen)

Potenzen mit der Basis 10 werden sehr häufig als verkürzte Schreibweise für sehr kleine oder sehr große Zahlen verwendet. Werte größer 1 können als Vielfaches von Zehnerpotenzen mit positivem Exponenten, Werte kleiner 1 als Vielfaches von Zehnerpotenzen mit negativem Exponenten dargestellt werden (**Bild 2** und **Tabelle 1**).

Beispiel 5: Zehnerpotenzen

Schreiben Sie die Zehnerpotenzen

a) 20 μH b) 10 ml c) 3 kHz

Lösung:

a) $20 \cdot 10^{-6} \text{ H}$ b) $10 \cdot 10^{-3} \text{ l}$ c) $3 \cdot 10^3 \text{ Hz}$

1.5 Wurzelgesetze

1.5.1 Wurzelbegriff

Das Wurzelziehen oder Radizieren (von lat. radix = Wurzel) ist die Umkehrung des Potenzierens. Beim Wurzelziehen wird derjenige Wurzelwert gesucht, der mit sich selbst multipliziert den Wert unter der Wurzel ergibt. Eine Wurzel besteht aus dem Wurzelzeichen, dem Radikanden unter dem Wurzelzeichen und dem Wurzelexponenten. Bei Quadratwurzeln darf der Wurzelexponent 2 weggelassen werden
 $\Rightarrow \sqrt[n]{a} = \sqrt{a}$.

Eine Wurzel kann auch in Potenzschreibweise dargestellt werden. Deshalb gelten bei Wurzeln auch alle Potenzgesetze.

Beispiel 1: Potenzschreibweise und Wurzelziehen
 Der Wurzelterm $\sqrt[2]{4} = \sqrt{4}$ ist
 a) in Potenzschreibweise darzustellen und
 b) der Wert der Wurzel zu bestimmen.
Lösung:
 a) $\sqrt[2]{4} = \sqrt[2]{4^1} = 4^{\frac{1}{2}}$ b) $\sqrt[2]{4} = \sqrt{4} = 2$; denn $2 \cdot 2 = 4$

1.5.2 Rechengesetze beim Wurzelrechnen

Addition und Subtraktion

Gleiche Wurzeln, die im Wurzelexponenten und im Radikand übereinstimmen, dürfen addiert und subtrahiert werden (**Tabelle 1**).

Beispiel 2: Addition und Subtraktion von Wurzeln
 Die Wurzelterme $3\sqrt{a}, -2\sqrt[3]{b}, +2\sqrt{a}, +4\sqrt[3]{b}$ sind zusammenzufassen.
Lösung:
 $3\sqrt{a} - 2\sqrt[3]{b} + 2\sqrt{a} + 4\sqrt[3]{b} = (3 + 2)\sqrt{a} + (4 - 2)\sqrt[3]{b}$
 $= 5\sqrt{a} + 2\sqrt[3]{b}$

Multiplikation und Division von Wurzeln

Ist beim Wurzelziehen der Radikand ein Produkt, so kann entweder aus dem Produkt oder aus jedem einzelnen Faktor die Wurzel gezogen werden. Bei einem Quotienten kann die Wurzel auch aus Zählerterm und Nennerterm gezogen werden (**Tabelle 1**).

Beispiel 3: Multiplikation und Division
 Berechnen Sie aus den Wurzeltermen $\sqrt{9 \cdot 16}$ und $\sqrt{\frac{9}{16}}$ den Wert der Wurzel.
Lösung:
 $\sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{144} = 12$
 oder $\sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{16} = 3 \cdot 4 = 12$
 $\sqrt{\frac{9}{16}} = 0,75$
 oder $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4} = 0,75$

$\sqrt[n]{a} = x; a \geq 0$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}; a \geq 0$
n Wurzelexponent	a Radikand, Basis
x Wurzelwert	m, $\frac{m}{n}$ Exponent

Tabelle 1: Wurzelgesetze	
Regel	algebraischer Ausdruck
Addition und Subtraktion Wurzeln dürfen addiert und subtrahiert werden, wenn sie gleiche Exponenten und Radikanden haben.	$r \cdot \sqrt[n]{a} \pm s \cdot \sqrt[n]{a}$ $= (r \pm s) \cdot \sqrt[n]{a}$
Multiplikation Ist der Radikand ein Produkt, kann die Wurzel aus dem Produkt oder aus jedem Faktor gezogen werden.	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
Division Ist der Radikand ein Quotient, kann die Wurzel aus dem Quotienten oder aus Zähler und Nenner gezogen werden.	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
Potenzieren Beim Potenzieren einer Wurzel kann auch der Radikand potenziert werden.	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

Allgemeine Lösung des Wurzelterms $\sqrt[n]{a^n}$

Bei der Lösung des Wurzelterms $\sqrt[n]{a^n}$ sind zwei Fälle zu unterscheiden:

gerader Exponent: $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

ungerader Exponent: $\sqrt[n]{a^n} = a$

Die Lösung einer Quadratwurzel ist immer positiv.

Beispiel 4: Zwei Lösungen
 Warum müssen beim Wurzelterm $\sqrt[2]{a^2}$ zwei Fälle unterschieden werden?
Lösung:
 $\sqrt[2]{a^2} = |a|$
 Fall 1: **a für a > 0**
 Fall 2: **-a für a < 0**
 Beispiel 1: Für $|a| = 2$ gilt $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{(2)^2} = \sqrt{4} = 2$

1.6 Logarithmengesetze

1.6.1 Logarithmusbegriff

Der Logarithmus (von griech. logos = Verhältnis und arithmos = Zahl) ist der Exponent (Hochzahl), mit der man die Basis (Grundzahl) a potenzieren muss, um den Numerus (Potenzwert, Zahl) zu erhalten.

Einen Logarithmus berechnen heißt den Exponenten (Hochzahl) einer bestimmten Potenz zu berechnen.

Für das Wort Exponent wurde der Begriff Logarithmus eingeführt.

Beispiel 1: Logarithmus

Suchen Sie in der Gleichung $2^x = 8$ die Hochzahl x , sodass die Gleichung eine wahre Aussage ergibt.

Lösung:

$$2^x = 8; 2^3 = 8; \Rightarrow x = 3$$

Die Sprechweise lautet: x ist der Exponent zur Basis 2, der zum Potenzwert 8 führt.

Die Schreibweise lautet: $x = \log_2 8 = 2$

1.6.2 Rechengesetze beim Logarithmus

Die Logarithmengesetze ergeben sich aus den Potenzgesetzen und sind für alle definierten Basen gültig (**Tabelle 1**).

Mit dem Taschenrechner können Sie den Logarithmus zur Basis 10 und zur Basis e bestimmen. Dabei wird \log_{10} mit \log und \log_e mit \ln abgekürzt (**Tabelle 2**).

Multiplikation

Wird von einem Produkt der Logarithmus gesucht, so ist dies gleich der Summe der einzelnen Faktoren.

Beispiel 2: $\log_{10} 1000$

Bestimmen Sie den Logarithmus von 1000 zur Basis 10

- mit dem Taschenrechner und
- interpretieren Sie das Ergebnis.

Lösung:

a) Eingabe: 1000 \log oder \log 1000 (taschenrechnerabhängig)

$$\text{Anzeige: } 3 \Rightarrow \log_{10} 1000 = 3$$

Wird der Wert 1000 faktorisiert, z.B. in $10 \cdot 100$, gilt Folgendes: $\log_{10} 1000 = \log_{10} (10 \cdot 100) = \log_{10} 10 + \log_{10} 100 = 1 + 2 = 3$

b) $\log_{10} 1000 = 3$, denn $10^3 = 1000$

Quotient

Wird von einem Quotienten der Logarithmus gesucht, so ist dies gleich der Differenz der Logarithmen von Zähler und Nenner.

Bei der Berechnung eines Logarithmus kann die Eingabe der Gleichung, abhängig vom Taschenrechner, unterschiedlich sein.

$$x = \log_a b$$

$$a^x = b$$

x Logarithmus (Hochzahl)

a Basis; $a > 0$

b Numerus (Zahl)

Tabelle 1: Logarithmengesetze

Regel	algebraischer Ausdruck
Produkt Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen der einzelnen Faktoren.	$\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$
Quotient Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz der Logarithmen von Zähler und Nenner.	$\log_a \left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$
Potenz Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Produkt aus dem Exponenten und dem Logarithmus der Potenzbasis.	$\log_a u^v = v \cdot \log_a u$

Tabelle 2: Spezielle Logarithmen

Basis	Art	Schreibweise	Taschenrechner
10	Zehnerlogarithmus	$\log_{10}; \lg$	\log -Taste
e	Natürlicher Logarithmus	$\log_e; \ln$	\ln -Taste
2	Binärer Logarithmus	$\log_2; \lg$	—

Beispiel 3: Division

Berechnen Sie $\log_{10} \left(\frac{10}{100}\right)$ mit dem Taschenrechner.

$$\text{Lösung: } \log_{10} \left(\frac{10}{100}\right) = \log_{10} 10 - \log_{10} 100$$

Eingabe: 10 \log - 100 \log =

Anzeige: 1 2 -1

$$\Rightarrow \log_{10} 10 - \log_{10} 100 = 1 - 2 = -1$$

oder durch Ausrechnen des Numerus $\left(\frac{10}{100}\right) = 0,1$

Eingabe: 0,1 \log

Anzeige: -1

$$\Rightarrow \log_{10} 0,1 = -1$$

1.7 Funktionen und Gleichungssysteme

1.7.1 Rechtwinkliges Koordinatensystem

Durch ein rechtwinkliges Koordinatensystem lassen sich Punkte in einer Ebene eindeutig festlegen. Das Koordinatensystem wird auch Achsenkreuz genannt. Die waagrechte Achse wird als x-Achse (Abszisse) und die senkrechte Achse als y-Achse (Ordinate) bezeichnet (**Bild 1**). Der Ursprung des Koordinatensystems ist der Punkt O (0|0). Ein Punkt in einem Achsenkreuz wird durch jeweils einen Achsenabschnitt für jede Achse festgelegt. Der Abschnitt auf der x-Achse wird als x-Koordinate (Abszisse) und der Abschnitt auf der y-Achse als y-Koordinate (Ordinate) bezeichnet. Der Punkt P (3|2) hat die x-Koordinate $x_P = 3$ und die y-Koordinate $y_P = 2$ (**Bild 1**).

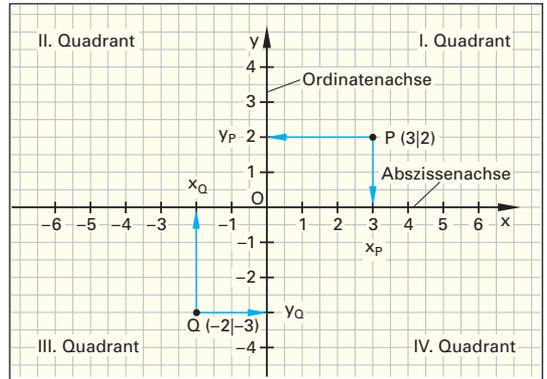


Bild 1: Zweidimensionales Koordinatensystem

Beispiel 1: Koordinatendarstellung

Welche Koordinaten hat der Punkt Q (-2|-3) ?

Lösung:

$x_Q = -2$ und $y_Q = -3$

Ein Achsenkreuz teilt eine Ebene in 4 Felder. Diese Felder nennt man auch Quadranten (**Bild 1**). Die Quadranten werden im Gegenuhrzeigersinn mit den römischen Zahlen I bis IV bezeichnet. Für Punkte P (x|y) im ersten I. Quadranten gilt $x > 0 \wedge y > 0$. Im zweiten Quadranten gilt $x < 0 \wedge y > 0$, im dritten $x < 0 \wedge y < 0$ und im vierten $x > 0 \wedge y < 0$.

Quadranten erleichtern die Zuordnung von Punkten.

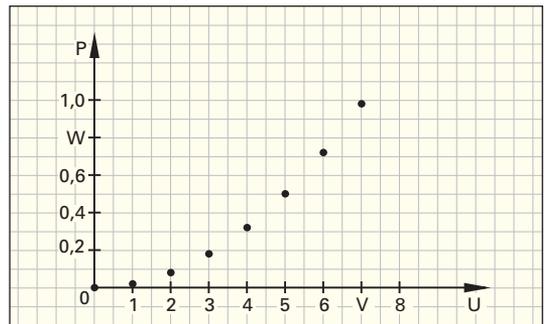


Bild 2: Leistungskurve im I. Quadranten

Für viele physikalische Prozesse ist eine Darstellung im I. Quadranten ausreichend.

Beispiel 2: Leistungskurve

Ermitteln Sie die Leistung P in einem Widerstand mit 50Ω mit $P = \frac{1}{R} \cdot U^2$, wenn die Spannung von 0V in 1-V-Schritten auf 7V erhöht wird.

Lösung:

Bild 2 und Wertetabelle 1:

U/V	0	1	2	3	4	5	6	7
P/W	0	0,02	0,08	0,18	0,32	0,5	0,72	0,98

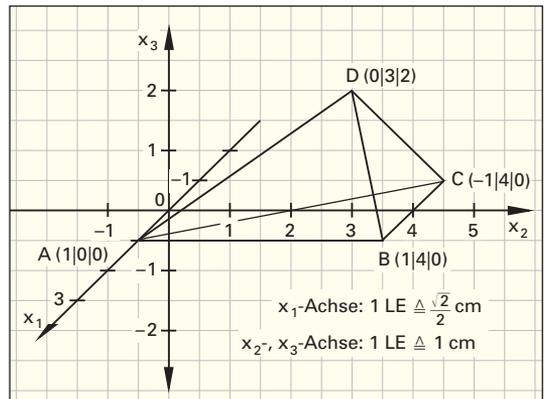


Bild 3: Dreidimensionales Koordinatensystem

Für räumliche Darstellungen werden Koordinatensysteme mit drei Koordinatenachsen verwendet. Diese werden z.B. mit x, y, z im Gegenuhrzeigersinn bezeichnet. In der Vektorrechnung werden die Bezeichnungen x_1, x_2, x_3 verwendet (**Bild 3**). Der Punkt A wird mit A (1|0|0) bezeichnet.

Aufgaben:

- Geben Sie je einen Punkt für jeden Quadranten zu **Bild 1** an.
- Geben Sie die Vorzeichen der Punktemengen in den vier Quadranten an.

Lösungen:

1. $P_1 (1|1), P_2 (-2|1), P_3 (-2|-4), P_4 (2|-3)$

2.

Quadrant	I	II	III	IV
x-Wert	> 0	< 0	< 0	> 0
y-Wert	> 0	> 0	< 0	< 0

1.7.2 Funktionen

Mengen enthalten Elemente. Man kann die Elemente einer Menge den Elementen einer anderen Menge zuordnen. Diese Zuordnung kann z.B. mit Pfeilen vorgenommen werden (**Bild 1**). Mengen, von denen Pfeile zur Zuordnung ausgehen, nennt man Ausgangsmengen (Definitionsmengen D), Mengen in denen die Pfeile enden, Zielmengen (Wertemengen W). Die Elemente von D sind unabhängige Variablen, z.B. x, t. Die Menge W enthält die abhängigen Variablen, z.B. y, s.

Zuordnungen können durch Pfeildiagramme, Wertetabellen, Schaubilder oder Gleichungen dargestellt werden. Alle Pfeilspitzen, die z.B. in einem Element enden, fasst man als neue Menge, die Wertemenge, zusammen.

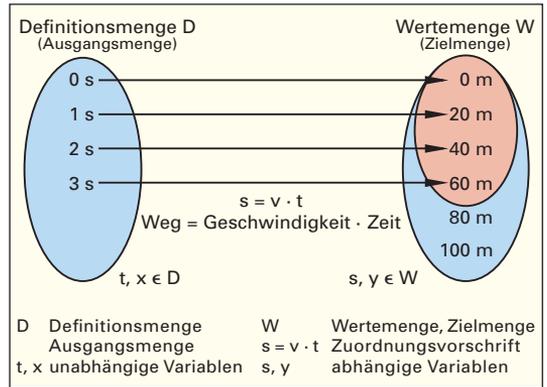


Bild 1: Elementezuordnung in Mengen mit dem Pfeildiagramm

Führen von mindestens einem Element der Ausgangsmenge D Pfeile zu unterschiedlichen Elementen der Zielmenge W, liegt keine Funktion, sondern eine Relation vor.

$x \triangleq t$ in s	0	1	2	3	4	5
$y \triangleq s$ in m	0	20	40	60	80	100

Bild 2: Wertetabelle für das Weg-Zeit-Diagramm

Kann man jedem Element einer Ausgangsmenge genau ein Element der Zielmenge zuordnen, nennt man diese Relation eine Funktion.

Eindeutige Zuordnungen nennt man Funktionen.

Im Pfeildiagramm erkennt man eine Funktion daran, dass von jedem Element ihrer Ausgangsmenge genau ein Pfeil zur Zielmenge ausgeht.

Bestehen eindeutige Zuordnungsvorschriften, können Zuordnungsvorschriften als Terme angegeben werden. Die Elemente lassen sich dann nach derselben Vorschrift berechnen. Dies wird z.B. oft bei physikalischen Gesetzen angewendet.

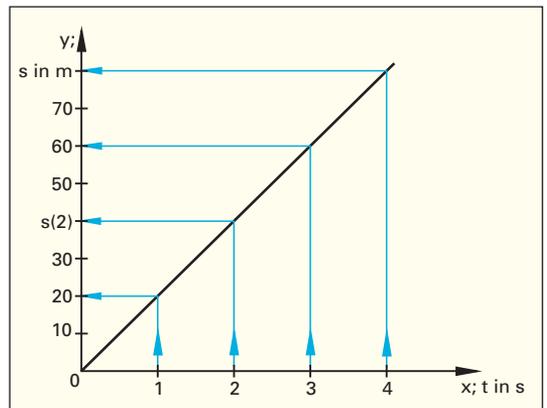


Bild 3: Wertetabelle und Schaubild des Weg-Zeit-Diagramms

Die grafische Darstellung einer Funktion heißt Schaubild, Graf oder Kurve.

Beispiel 1: Konstante Geschwindigkeit

Ein Motorrad fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit $v = 20 \frac{m}{s}$. Stellen Sie

- a) mit einer Wertetabelle den Weg s als Funktion der Zeit t mit der Funktion $s(t) = v \cdot t$ dar,
- b) den Grafen (Schaubild) der Funktion im Koordinatensystem dar

Lösung:

- a) **Bild 2**, b) **Bild 3**

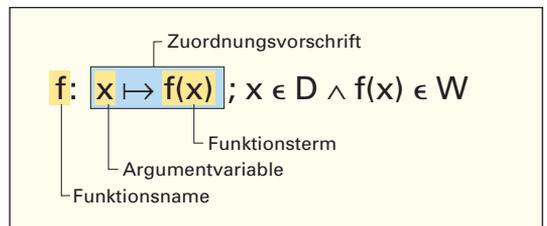


Bild 4: Allgemeine Zuordnungsvorschrift

Funktionen werden in der Mathematik mit Kleinbuchstaben wie f oder g bezeichnet. Ist x_0 ein Element der Ausgangsmenge D einer Funktion f, so schreibt man $f(x_0)$ für das dem x_0 eindeutig zugeordnete Element in der Zielmenge W und nennt $f(x_0)$ den Funktionswert der Funktion an der Stelle x_0 . Ist z.B. $x_0 = 4$, so ist der Funktionswert an der Stelle 4: $f(4) = 80$ (**Bild 3**). Für die Zuordnungsvorschrift einer Funktion verwendet man auch symbolische Schreibweisen (**Bild 4** und **Bild 5**).

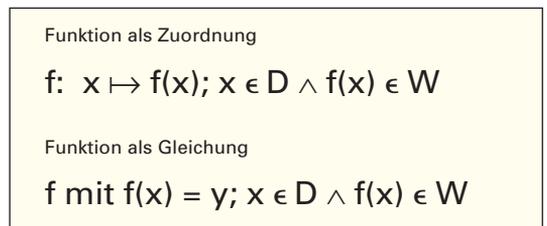


Bild 5: Funktion als Zuordnung oder Gleichung

1.7.3 Lineare Funktionen

1.7.3.1 Ursprungsgeraden

Bei der Darstellung proportionaler Zusammenhänge in der Physik und der Mathematik kommen lineare Funktionen, z.B. in der Form $g(x) = m \cdot x$, vor. Das Schaubild einer linearen Funktion heißt Gerade.

Beispiel 1: Ursprungsgerade

Gegeben ist die Funktion $g(x) = 1,5 \cdot x$. Erstellen Sie eine Wertetabelle und zeichnen Sie das Schaubild von g .

Lösung: **Bild 1**

Überprüfen Sie, ob der Punkt $P_1(2|3)$ auf der Geraden g mit $g(x) = 1,5 \cdot x$ liegt. Dazu setzt man die feste Stelle $x_1 = 2$ in die Funktion ein und erhält $y_1 = g(2) = 3$. Der Punkt $P(2|3)$ liegt also auf der Geraden g .

$P_1(x_1|y_1)$ liegt auf g , wenn $y_1 = g(x_1)$ ist.

Geraden durch den Ursprung $O(0|0)$ heißen Ursprungsgeraden. Die Schaubilder aller Ursprungsgeraden unterscheiden sich durch das Verhältnis von y -Wert Δy_1 zu x -Wert Δx_1 . Dieses Verhältnis wird bei Ursprungsgeraden als Steigung $m = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}$ bezeichnet. Die Steigung m lässt sich aus dem Steigungsdreieck mit $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ berechnen.

Beispiel 2: Steigung m

Bestimmen Sie die Steigungen der Geraden f , g und h in **Bild 2** mit jeweils einem Punkt P_1 und dem Ursprung.

Lösung:

$f: m = \frac{2}{5} = 0,4$ $g: m = \frac{3}{3} = 1$ $h: m = \frac{5}{1} = 5$

Das Verhältnis $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ wird auch Differenzenquotient genannt. Δy und Δx sind die Differenzen der Koordinatenwerte von $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$.

Beispiel 3: Steigung aus Punktepaaren

Bestimmen Sie die Steigungen der Geraden f , g und h durch Bildung der Differenzwerte von jeweils zwei geeigneten Punktepaaren.

Lösung:

$f: m = \frac{2-1}{5-2,5} = 0,4$ $g: m = \frac{4-3}{4-3} = 1$
 $h: m = \frac{5-2,5}{1-0,5} = 5$

Aufgaben:

- Bestimmen Sie die Steigung für die Ursprungsgerade durch den Punkt P_3 in **Bild 1**.
- Welche Steigung hat die Gerade durch $P_1(1|1)$ und $P_2(3|6)$?

$g: y = m \cdot x$

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

m Steigung
 Δx Differenz der x -Werte x_1, y_1 Koordinaten von P_1
 Δy Differenz der y -Werte x_2, y_2 Koordinaten von P_2

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$	-6	-4,5	-3	-1,5	0	1,5	3	4,5	6

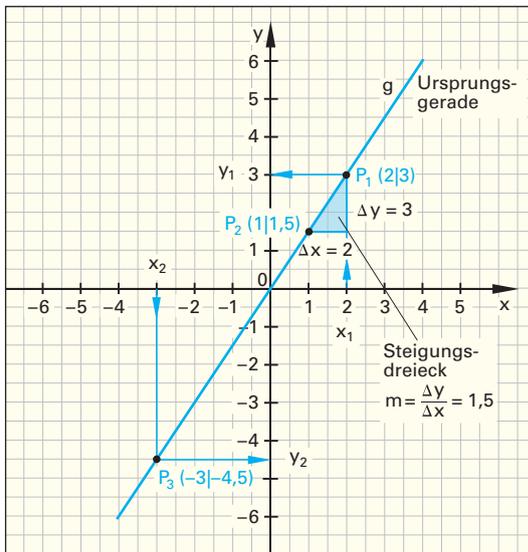


Bild 1: Wertetabelle und Schaubild der Ursprungsgeraden

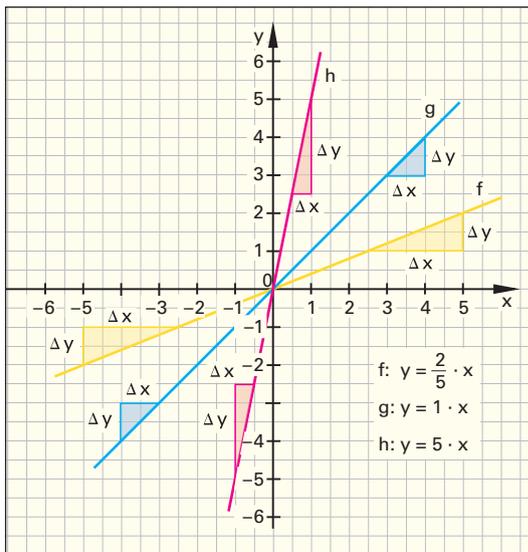


Bild 2: Ursprungsgeraden und Steigungen

Lösungen:

1. $m = \frac{-4,5}{-3} = 1,5$ 2. $m = 2,5$

1.7.3.2 Allgemeine Gerade

Schaubilder von Geraden, die nicht durch den Ursprung gehen, haben Achsenabschnitte auf der x-Achse und der y-Achse.

Beispiel 1: Wasserbecken

Ein Wasserbecken mit der Füllhöhe $h_1 = 3$ m wird geleert (Bild 1). Die Abflussmenge ist konstant. Bestimmen Sie die Geradengleichung mit der Steigung m aus den Punkten H_1 und H_2 und dem Achsenabschnitt b .

Lösung: $m = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{2-3}{3-0} = -\frac{1}{3}$; $b = 3 \Rightarrow y_1 = -\frac{1}{3}t + 3$

Durch Verlängern der Geraden (Bild 1) erhält man den Schnittpunkt mit der x-Achse (Nullstelle) und damit die Entleerungszeit t in min. $0 = -\frac{1}{3}x + 3 \Leftrightarrow x = 9 \Rightarrow t = 9$ min.

Geradenschar

Je nach Füllhöhe h des Wasserbeckens ist die Entleerungszeit t unterschiedlich.

Beispiel 2: Geradenschar

Bild 2 enthält die Gerade für die Füllhöhe h_1 .

- Zeichnen Sie von dieser Geraden ausgehend, die Geraden für die Füllhöhen $h_2 = 1,5$ m und $h_3 = 6$ m durch Parallelverschieben in ein Schaubild.
- Wie lauten die Gleichungen der Geraden für die Füllhöhen h_2 und h_3 ?

Lösung:

a) **Bild 2** b) $g_2(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{3}{2}$ und $g_3(x) = -\frac{1}{3}x + 6$

Geradenscharen haben die gleiche Steigung m aber unterschiedliche Achsenabschnitte.

Geraden mit verschiedenen Steigungen und einem gemeinsamen Schnittpunkt S nennt man auch Geradenbüschel.

Beispiel 3: Unterschiedliche Abflussmenge im Wasserbecken

Die Abflussmenge wird a) verdoppelt, b) halbiert. Berechnen Sie die Auslaufzeiten für beide Fälle.

Lösung:

a) $0 = -\frac{2}{3}x + 3 \Rightarrow x = 4,5 \Rightarrow t = 4,5$ min

b) $0 = -\frac{1}{6}x + 3 \Rightarrow x = 18 \Rightarrow t = 18$ min

Orthogonale Geraden

Den Winkel zwischen einer Geraden und der x-Achse erhält man mit $m = \tan \alpha$. Die Gerade g_6 (Bild 3) hat die Steigung $m = 1$, also ist $\tan \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \arctan(1) \Rightarrow \alpha = 45^\circ$. Zur Prüfung, ob zwei Geraden senkrecht aufeinander stehen, verwendet man die Formel $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Beispiel 4: Orthogonale Geraden

Zeigen Sie, dass die Geraden g_6 mit $y = x + 3$ und g_7 mit $y = -x + 3$ senkrecht aufeinander stehen (Bild 3).

Lösung: $m_6 = 1, m_7 = -1 \Rightarrow m_6 \cdot m_7 = 1 \cdot (-1) = -1$

$g: y = m \cdot x + b$	$m = \tan \alpha$	mit $g \perp h$ $m_1 \cdot m_2 = -1$
x Abszissenwert	m Steigung	
y Ordinatenwert	g, h Geraden	
b Achsenabschnitt auf der y-Achse		
α Winkel zwischen Gerade und x-Achse		

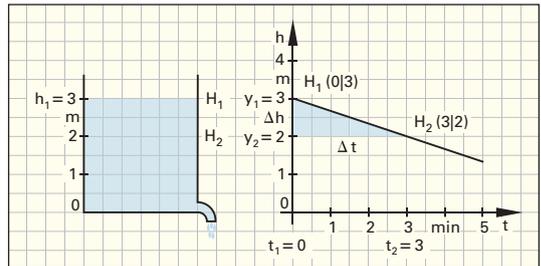


Bild 1: Entleerung eines Wasserbeckens

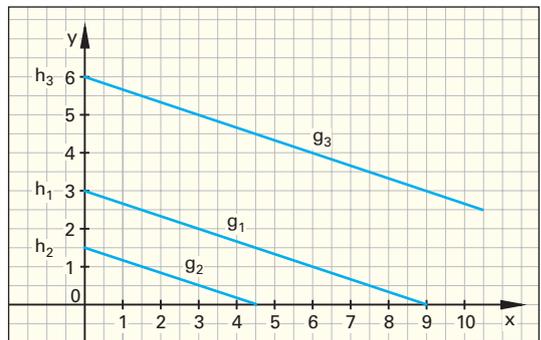


Bild 2: Geradenschar

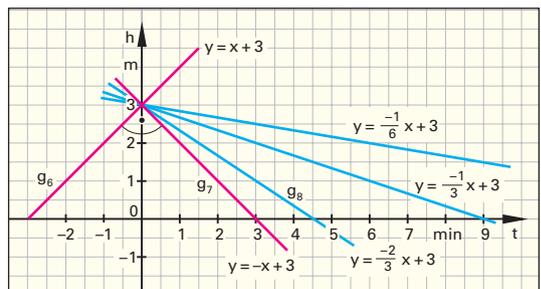


Bild 3: Geradenbüschel und orthogonale Gerade

Aufgaben:

- Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden $g_6: y = -\frac{1}{3}x + 3$ mit der x-Achse (Bild 3).
- Wie wirkt sich die Halbierung der Auslaufmenge (Bild 3) auf die Gleichung der Geraden aus?

Lösungen:

1. $y = 0 \Rightarrow -\frac{1}{3}t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = 9 \Rightarrow N(9|0)$

2. Die Steigung wird doppelt so groß, die Auslaufzeit halbiert.

Überprüfen Sie Ihr Wissen!

Rechtwinkliges Koordinatensystem

1. Geben Sie die Koordinaten aller Eckpunkte des Quaders **Bild 1** an.

Ursprungsgeraden

2. Bestimmen Sie

a) aus der Wertetabelle die Gleichung der Geraden.

x	0	1	2	3	4	5	...
f(x)	0	-2	-4	-6	-8	-10	...

b) Welche Werte y ergeben sich für $x = -1, -2, -3$?

3. Prüfen Sie, ob die Punkte P (2|-3) und Q (-3|-4,5) auf der Geraden $y = \frac{3}{2} \cdot x$ liegen.

Allgemeine Geraden

4. Erstellen Sie den Funktionsterm der linearen Funktion, deren Schaubild

a) die Steigung 5 hat und durch den Punkt (2|-4) geht;

b) durch die Punkte P (-1|-5) und Q (4|7) geht.

5. Die Gerade g geht durch die Punkte P (2|3) und Q (4|2), die Gerade h durch den Punkt A (2|1) mit der Steigung $m = 2$.

a) Bestimmen Sie die Funktionsterme der zugehörigen Funktionen,

b) berechnen Sie die Nullstellen der Funktionen.

c) Ermitteln Sie den Schnittpunkt der Geraden g und h.

6. Ein Parallelogramm hat die Eckpunkte A (2|1), B (8|1), C (9|5) und D (3|5).

a) Geben Sie die vier Geradengleichungen durch die Eckpunkte an.

b) Bestimmen Sie die Funktionsterme der Funktionen der Diagonalen.

c) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Diagonalen.

7. Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden, die auf der Geraden mit der Funktion $f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$ senkrecht steht und durch den Punkt P (1|4) geht.

8. Ein Auto, das für 16000 € beschafft wurde, wird mit 15% jährlich linear abgeschrieben.

a) Stellen Sie die Funktion auf, die den Buchwert des Autos in Abhängigkeit von seinem Alter beschreibt.

b) Nach wie viel Jahren ist das Auto ganz abgeschrieben?

c) Nach welcher Zeit beträgt der Buchwert 24% des Beschaffungswertes?

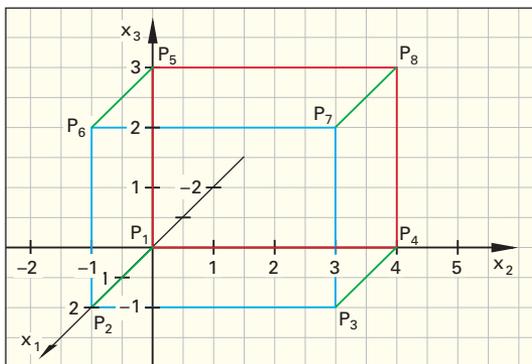


Bild 1: Quader

9. Die Gerade f hat die Steigung $m = 0,5$ und geht durch den Punkt P (1|1).

a) Zeichnen Sie das Schaubild.

b) Ergänzen Sie das Schaubild mithilfe der parallelen Geraden g und h zur Geradenschar, dass g eine Einheit oberhalb und h eine Einheit unterhalb von f verläuft.

c) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden, die senkrecht auf der Geraden f steht und durch den Punkt Q (3|2) geht.

d) Berechnen Sie die Schnittpunkte mit den Geraden g und h.

Lösungen:

1. $P_1(0|0|0)$, $P_2(2|0|0)$, $P_3(2|4|0)$, $P_4(0|4|0)$, $P_5(0|0|3)$, $P_6(2|0|3)$, $P_7(2|4|3)$, $P_8(0|4|3)$.

2. a) $y = -2 \cdot x$

b) $x = 1 \Rightarrow y = -2$; $x = 2 \Rightarrow y = -4$; $x = 3 \Rightarrow y = -6$

3. P nein; Q ja

4. a) $f(x) = 5 \cdot x - 14$ b) $g(x) = 2,4 \cdot x - 2,6$

5. a) $g(x) = -0,5 \cdot x + 4$; $h(x) = 2 \cdot x - 3$

b) für $g(x) \Rightarrow x = 8$; für $h(x) \Rightarrow x = 1,5$

c) S (2,8|2,6)

6. a) f: $y = 5$, g: $y = 1$, h: $y = 4 \cdot x - 7$; i: $y = 4 \cdot x - 31$

b) $d_1(x) = \frac{4}{7} \cdot x + b - \frac{1}{7}$, $d_2(x) = -\frac{4}{5} \cdot x + \frac{37}{5}$

c) S (5,5|3)

7. $h(x): y = -\frac{2}{3} \cdot x + \frac{14}{3}$

8. a) $k(x) = -2400 \cdot x + 16000$

b) $x = 6\frac{2}{3}$ Jahre c) $x = 5,06$ Jahre

9. a) $f(x) = 0,5 \cdot x + 0,5$; $g(x) = 0,5 \cdot x + 1,5$;

$h(x) = 0,5 \cdot x - 0,5$ b) $y = -2 \cdot x + 8$

c) $g(x) \Rightarrow x = 2,6$; $y = 2,8$; $h(x) \Rightarrow x = 3,4$; $y = 1,2$